Un acercamiento al Cálculo desde la Realidad Virtual con *DESCARTES*

Juan G. Rivera Berrío, *Proyecto Descartes (ITE del Ministerio de Educación de España) e Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín (Colombia)*
José L. Alcón Camas, *Proyecto Descartes (ITE) e Instituto Baelo Claudia de Tarifa, Cádiz (España)*
José R. Galo Sánchez *Proyecto Descartes (ITE) y Universidad de Córdoba (España)*

RESUMEN.

Representar las aplicaciones del cálculo matemático es un reto permanente de nosotros los docentes. A veces recurrimos a las metáforas o a las analogías, otras veces copiamos las representaciones de un texto y las comunicamos a través de diapositivas o fotocopias, pero, en la mayoría de las veces, nos atrevemos a esbozarlas en una pizarra. En este último caso la comunicación pierde efectividad por su alejamiento notorio de la realidad que se pretende representar.

En esta comunicación demostraremos cómo es posible romper con esta práctica tradicional que, increíblemente, poco se diferencia de las realizadas en siglos pasados. Utilizando una unidad didáctica interactiva de *Descartes* mostraremos cómo se representan volúmenes de revolución (con o sin sección hueca) y su vinculación a la integral definida. La representación de la realidad desde la virtualidad muestra su poder representacional a través de una escena interactiva del cálculo estructural, que permite identificar los atributos imposibles de lograr en una imagen plana. Es el retorno al pensamiento 3D con Descartes que pretendemos recuperar, en tanto que el pensamiento espacial es un elemento básico en el pensamiento científico. Ingenieros, escultores y arquitectos son pensadores espaciales que requieren representaciones más cercanas a esa realidad que intervienen.

Nivel educativo: Bachillerato y Universidad.

1. INTRODUCCIÓN.

> Una escuela en el segundo entorno [el entorno urbano], por ejemplo, será proximal, recintual, presencial, sincrónica, analógica, monolingüe (o monocultural), nacional, etc. En cambio, una escuela en el tercer entorno será distal, reticular, representacional, asincrónica, digital, multilingüe (o multicultural), transnacional, etc. (Echeverría, 1999, p.146).[1]

[1] El segundo entorno (Polis) y tercer entorno (Telépolis) son dos conceptos utilizados por Echeverría (1999) que le permiten describir el tránsito hacia la extraña y nueva realidad, que por contraste es artificial, casi virtual. Este "mundo digital" es un referente que nos permitirá demostrar la importancia de una representación en el contexto del interpretante. Así como criticamos al científico que genera representaciones con el propósito de comunicar al público lego, ignorando su contexto, también criticamos al docente que ignora la existencia de un nuevo entorno en el que se desarrolla su público objetivo, los discentes.

No podemos sustraernos a la nueva realidad de las tecnologías de la información y comunicación (TIC), en tanto que se han constituido en el entorno de los llamados "nativos digitales" (Negroponte, 1995). Pretender construir representaciones en el contexto de los entornos tradicionales es asegurarse de una baja comunicación, en comparación con el tercer entorno. Si nuestro propósito es construir representaciones que lleguen a un mayor número de estudiantes, el tercer entorno parece constituirse en el espacio ideal para la comunicación. En este entorno, como lo advertía Papert[2], hay generaciones digitales o del ordenador. Algunos docentes son seres digitales, otros son inmigrantes, pero un buen número aún permanecen en el segundo entorno. No estamos afirmando que la enseñanza tradicional esté equivocada; nuestro reclamo está orientado al uso de los recursos disponibles que garanticen mejores representaciones y, en consecuencia, una mejor comunicación. En la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo, el desaprovechamiento de los recursos del tercer entorno es imperdonable, dado que muchos de ellos son de libre distribución y se ajustan a los hábitos de los estudiantes, en tanto que son seres digitales.

Las representaciones en este entorno emergente aprovechan los recursos de la web 2.0, la web de los estudiantes, la web que constituye su nuevo mundo, en el que crecen y se desarrollan. Es el mundo de los blog, de las wiki, de los foros, del *Ares*, del *YouTube*, del *Messenger*, del *Facebook*, son las nuevas redes sociales en las que se comparten pensamientos, emociones, conocimientos y conocimiento. Por contraste, el segundo entorno es el mundo estático del pizarrón tradicional, poco convocante y anclado en los viejos paradigmas educativos. Es un mundo forjador de cerebros planos[3]. En el mundo virtual del tercer entorno hay gran actividad, el cálculo es dinámico, es un mundo multicolor en movimiento, en constante actualización, colaborativo, irreverente, casi sin normas.

Los docentes del tercer entorno tienen sus blogs, participan en foros, suben videos, *chatean* con familiares, amigos, pares y estudiantes, publican artículos en

---

[2] Papert observa que el ingreso de los niños al mundo digital o tercer entorno es más cómodo que para los adultos:

> Large numbers of children see the computer as "theirs" -- as something that belongs to their generation. Many have observed that they are more comfortable with the machines than their parents and teachers are. They learn to use them more easily and naturally. For the moment some of us old fogeys may somehow have acquired the special knowledge that makes one a master of the computer, but children knows that it is just a matter of time before they inherit the machines. They are the computer generation (Papert, 1993).

Esta situación se refleja en el rechazo de muchos docentes a las nuevas tecnologías, en tanto que representa un mayor esfuerzo para preparar sus clases. La tendencia a permanecer en el *status quo,* en el cual son los expertos, contribuye a ampliar la brecha entre los dos mundos del proceso enseñanza-aprendizaje: el mundo del docente y el mundo del discente.

[3] Una de nuestras afirmaciones, que genera crítica, es el "pensamiento plano" que se propicia desde los actuales sistemas educativos. El uso de pizarrones y cuadernos de notas para representar objetos 3D no permite un desarrollo de la visualización espacial adecuado.

la web, usan herramientas informáticas como apoyo a su actividad docente. Por otra parte, los docentes en tránsito a este entorno han comprado un ordenador, tienen su cuenta de correo, preparan textos en Word o diapositivas en PowerPoint, pero, a pesar de estos ingentes esfuerzos, es pobre su poder de convocatoria, sus estudiantes siguen reacios a ingresar a ese mundo casi anclado en el segundo entorno. En los nuevos códigos del tercer entorno no se espera una clase magistral, todos los convocados participan. El canal de comunicación es de muchos a muchos, se trata de ambientes colaborativos de aprendizaje. La tarea de enseñar, comunicar o, en el contexto del tercer entorno, compartir conocimientos, encuentra en la web 2.0 su mejor aliado. No obstante, no todo es color de rosa. La existencia de un nuevo entorno viene acompañada de riesgos que deben ser identificados, valorados y gestionados, de cara a hacer más efectivas las relaciones sociales, que permita el aprovechamiento de los recursos en procura de cerrar la que hemos denominado "brecha generacional".

El uso de las TIC permite generar representaciones que lleguen a un mayor número de estudiantes. Los *blogs*, por ejemplo, permiten una comunicación de tipo interactiva, que incluye, además de escenas dinámicas, la posibilidad de incluir comentarios de los usuarios. Por otra parte, a través de las denominadas *wiki* es posible construir colectivamente un discurso (wikipedia es un ejemplo de ello). Igualmente, los docentes que utilizan los recursos de la web 2.0 tendrán mayores posibilidades de llevar sus presentaciones a un mayor número de estudiantes, en tanto que son los recursos propios del mundo discente.

En el contexto anterior, hemos aprovechado el proyecto Descartes[4] enmarcado en uno de los problemas que ha generado líneas y proyectos de investigación en la enseñanza de las matemáticas y en las ciencias cognitivas: la aptitud espacial. Como premisa de entrada diremos que el pensamiento de nuestros estudiantes es deficiente en la visualización espacial, evidenciado en las dificultades presentadas para comprender conceptos matemáticos en el ámbito 3D (geometría vectorial, volúmenes de revolución, entre otros).

[4] Este proyecto del Ministerio de Educación español lo hemos aprovechado en los temas referidos a la geometría 3D, el cálculo integral y estructural. En la página http://recursostic.educacion.es/descartes/web/ se tiene la siguiente descripción del proyecto:

> Descartes tiene como principal finalidad promover nuevas formas de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas integrando las TIC en el aula como herramienta didáctica. Aparece en el año 1999 con la intención de romper esa tendencia tradicional (segundo entorno) aprovechando las circunstancias que se dan en este nuevo siglo, tanto desde el punto de vista económico y tecnológico, como es el abaratamiento de los equipos, la aparición de las líneas de alta velocidad para la transmisión de datos, la utilización generalizada de Internet a bajo coste, etc.; como social, la utilización generalizada del ordenador y de Internet en nuestra sociedad y, en particular, el interés de muchos profesores de matemáticas por las TIC.

Lo importante, para nuestras necesidades, es el diseño tipo "realidad virtual", que permite una interacción mucho más atractiva para los estudiantes. La posibilidad de interactuar con objetos, antes representados en el plano, acerca al estudiante a un mundo de representaciones análogo al mundo en el que crece y se desarrolla, el tercer entorno.

2. UN ACERCAMIENTO AL CÁLCULO INTEGRAL.

El pensamiento espacial o 3D es básico en el pensamiento científico, en tanto que el mundo de la ciencia no es plano. Ingenieros, escultores y arquitectos son pensadores espaciales que han logrado sus aptitudes gracias a sus propios esfuerzos de desarrollo cognitivo en esta área, en contraposición al poco aporte del sistema educativo en el que se inscribieron. Si revisamos los diferentes programas curriculares de los países hispanoamericanos, la capacidad espacial presenta un alto déficit de tratamiento en todos los niveles. Los currículos de matemáticas se han centrado en los números y sus operaciones, el razonamiento lógico, las habilidades y destrezas para operar algébricamente (todas necesarias en la formación matemática). Si comparamos el tiempo dedicado al estudio de la geometría plana frente a la geometría espacial, observaremos que el pensamiento espacial sigue siendo deficitario.

En el currículo de matemáticas americano se observa la misma deficiencia en el pensamiento espacial. La *National Council of Teachers of Mathematics* (2006) presenta en su currículo de los grados 1 a 8 un especial énfasis en los números, operaciones, medidas, algebra, análisis de datos, probabilidad y geometría plana. Algunas excepciones que incluyen geometría espacial, se centran en la necesidad de medir y calcular áreas y volúmenes. Este cálculo es posible realizarse a través de algunas propiedades simples del objeto representado, generalmente asociado a las longitudes. El volumen de un prisma, por ejemplo, es el producto de tres longitudes. Es decir, no demanda de otras propiedades intrínsecas del objeto representado (posición, color, rotación, etc.).

En este apartado mostramos algunas escenas interactivas diseñadas en Descartes que facilitan la representación y comprensión de fenómenos simples como un volumen de revolución que, desde un pensamiento plano, se ha convertido en un fenómeno complejo. Estas escenas se pueden observar en: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/aplicaciones_de_las_integrales/00_aplicaciones.htm

2.1. ESCENAS CON VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN.

Un primer ejemplo que evidencia la complejidad que genera el pensamiento plano es la representación de volúmenes de revolución. En una clase tradicional, el docente recurre a una o dos imágenes que traten de dar cuenta del volumen generado al rotar un región alrededor de un eje. Luego se pide al estudiante que trate de imaginar dicho volumen. Lo que ignoramos es nuestra incapacidad mental para rotar imágenes[5]. Peor aún, desconocemos las pocas competencias en aptitud espacial de nuestros estudiantes, en tanto que su pensamiento se ha desarrollado en el mundo plano de nuestros sistemas educativos.

[5] Una prueba sencilla de esta incapacidad es tratar identificar, en una imagen puesta al revés, la expresión de una cara: "Sostenga el dibujo de una cara al revés y usted no puede reconocer la expresión. Quizás usted puede ver que está sonriendo, pero no exactamente qué clase de sonrisa es…" (Wittgenstein, 1953, p.198).

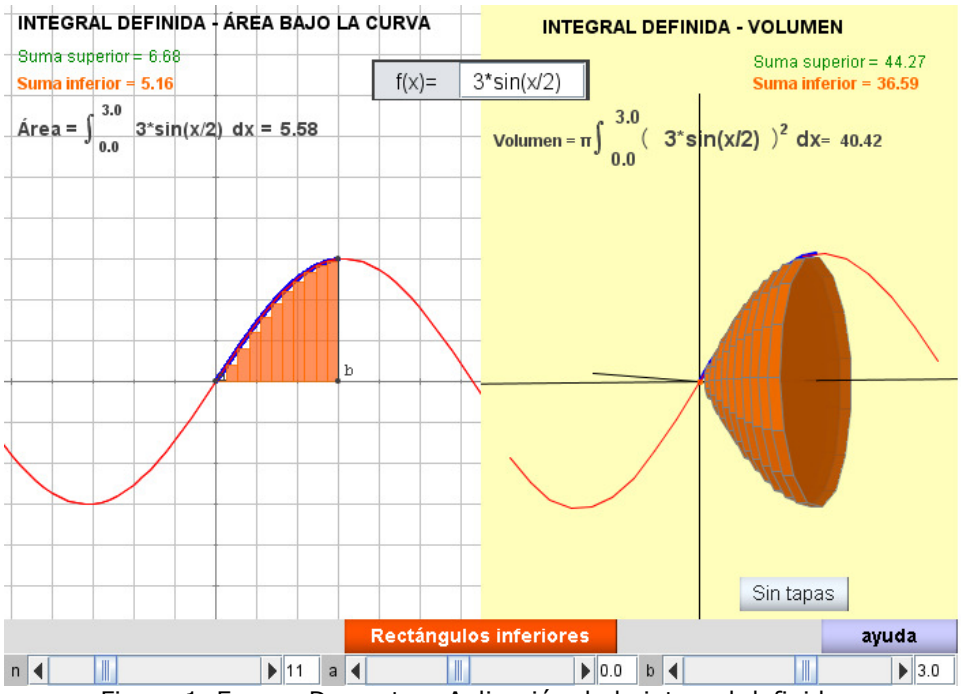

Figura 1. Escena Descartes: Aplicación de la integral definida.

El retorno al pensamiento 3D es posible con el uso de escenas dinámicas, interactivas y tridimensionales como la que se observa en la figura 1. La transición de la representación plana de una región bajo una curva (imagen izquierda) hacia el volumen generado al rotar esta región alrededor del eje x (imagen derecha) es simple y elimina la complejidad. El estudiante interactúa con el objeto 3D[6], lo interviene y, en consecuencia, construye su conocimiento. En la misma escena puede observar diferentes volúmenes de revolución que se obtienen al cambiar la función f(x) (ver figura 2).

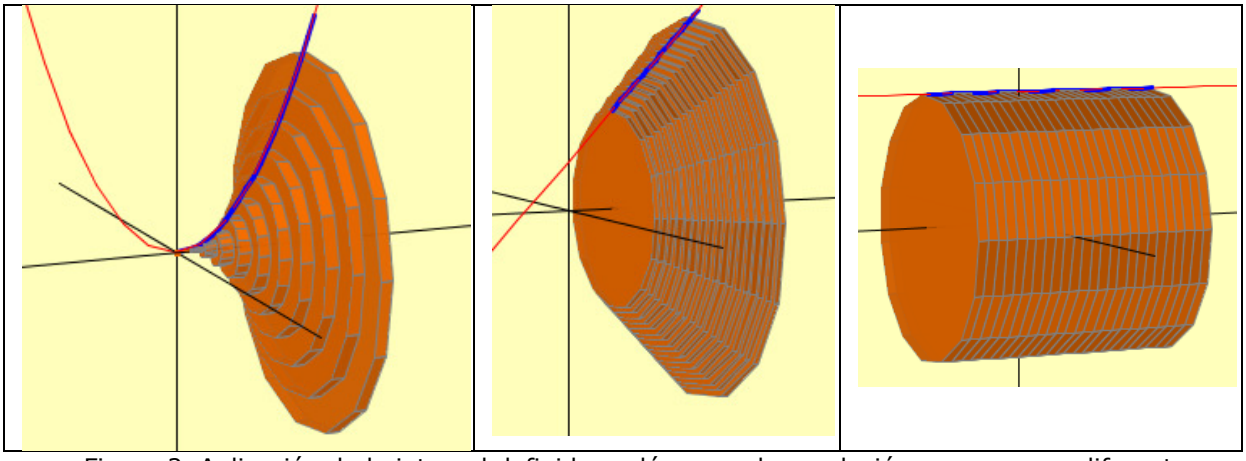
Figura 2. Aplicación de la integral definida: volúmenes de revolución que generan diferentes funciones.

[6] En una escena Descartes, como la de la figura 1, el estudiante interviene el objeto cambiando sus propiedades: posición (clic izquierdo sostenido), tamaño (clic derecho sostenido), dominio de la función (barras de desplazamiento), tipo de discos (botones) y la función misma (cuadro de diálogo).

2.2. ESCENAS CON VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN DE SECCIÓN HUECA.

La dificultad para rotar mentalmente los volúmenes se incrementa al incluir un ingrediente adicional: un volumen negativo que genera la sección hueca. Nuevamente Descartes elimina la complejidad. En la figura 3 se observa: a) un cono de sección hueca que se origina desde dos funciones lineales, b) un paraboloide de sección hueca y c) la imagen de un volumen de sección hueca en su proceso de desarrollo. En estas escenas es posible observar la generación del volumen y el comportamiento de la sección transversal al variar el dominio de la función.

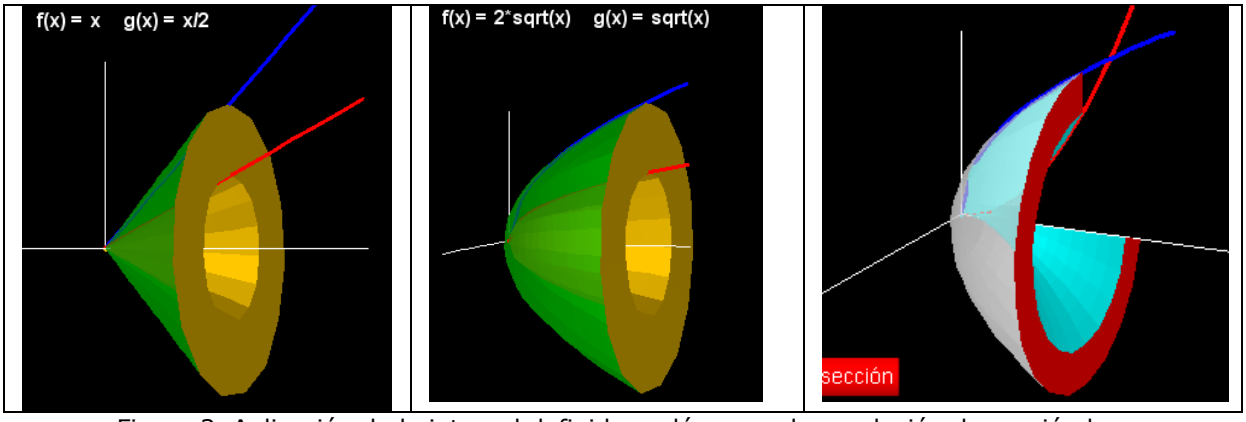

Figura 3. Aplicación de la integral definida: volúmenes de revolución de sección hueca.

3. UN ACERCAMIENTO AL CÁLCULO ESTRUCTURAL

La posibilidad de diseñar representaciones que "emulen" el objeto representado es cada vez mayor. La implementación de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación permiten hoy la construcción de escenarios virtuales que transmiten mayores flujos de información del objeto representado: lo simuladores de vuelo, los simuladores de carreras, el cine 3D, las aplicaciones virtuales para las ciencias básicas (física, química, biología), los video juegos y, en nuestro caso, el Nippe Descartes evidencian un mayor acercamiento a la realidad desde la representación. Podríamos extendernos en una gran cantidad de ejemplos prácticos que prueban nuestras afirmaciones, pero un acercamiento al cálculo estructural será suficiente para ello.

Las escenas que presentamos en este apartado se pueden consultar en: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/estructuras/estructuras_intro.htm. No es necesario ser ingeniero o estudiante de ingeniería para comprender la importancia de las representaciones dinámicas e interactivas que posibilita Descartes.

Descartes está en permanente evolución. Las nuevas versiones traen mejoras sustanciales que facilitan aún más nuestras representaciones. Una de esas mejoras son los llamados "*discursos Descartes* Web *2.0*", que permite, además de las imágenes interactivas, la inclusión de textos interactivos. En la figura 4 se observa un ejemplo de ello. Lamentablemente en este texto no podemos "mostrar" el potencial del discurso, en tanto que tendríamos que usar una buena

cantidad de figuras que evidencien la interactividad y, aún así, nos quedaríamos cortos en la explicación. Basta decir que al interactuar con las barras, el texto y el diagrama cambian de acuerdo a las nuevas condiciones del objeto intervenido.

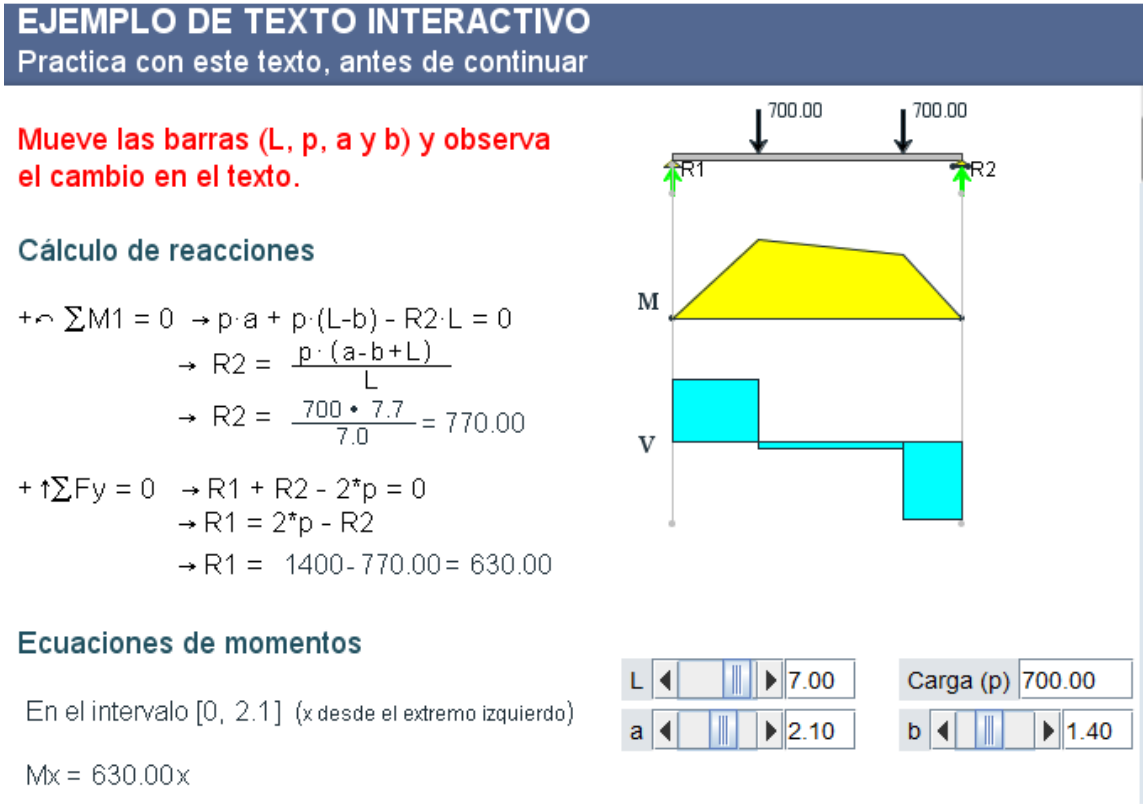

Figura 4. Texto e imágenes interactivas en los discursos Descartes.

Por otra parte, es común en el cálculo estructural recurrir a esquemas, diagramas, ecuaciones y otras representaciones que "muestren" el comportamiento de la estructura sometida a fuerzas externas (cargas, sismos, viento, etc.). El estudiante de ingeniería, al igual que el estudiante de secundaria, tendrá que hacer grandes abstracciones para comprender qué es lo que se representa. Es decir, tratar de imaginar el objeto de la realidad que se interviene.

El uso de los que hemos denominado "objetos virtuales" diseñados con Descartes permite, nuevamente, una transición más simple de la realidad a la representación. En la figura 5 se observan los elementos estructurales de un techo (entramado de vigas) apoyados sobre dos muros. Nuestro estudiante puede interactuar con este objeto "de realidad virtual" y observar cómo está construido dicho objeto. Una vez se haya interactuado con el objeto, podrá comprender una primer representación de las fuerzas sobre la viga principal (cumbrera). Finalmente, la representación esquemática y plana de las fuerzas sobre las vigas será de mayor comprensión.

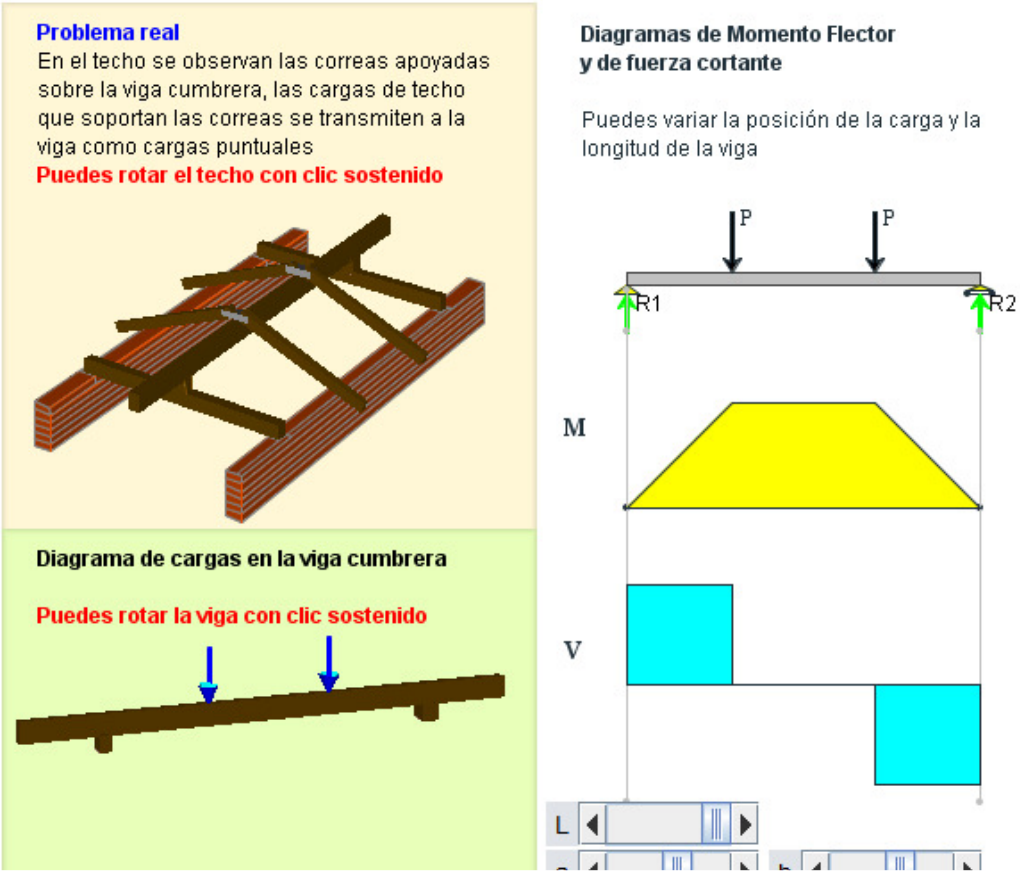

Figura 5. De la realidad a la representación.

No podemos afirmar categóricamente que estas representaciones mejoren significativamente la comprensión de los objetos representados. No obstante, estamos seguros que es posible crear mejores representaciones, en tanto que entregan más información y con menor esfuerzo mental al estudiante. En el caso de las escenas anteriores, no se trata de simples animaciones, las cuales no garantizan mayores rendimientos (Hart, 2004), sino de escenas que permiten la interacción con el estudiante; es decir, son representaciones bidireccionales, por contraste a las unidireccionales tradicionales. Esta interacción logra que el estudiante extraiga más información que en la representación estática no es posible.

CONCLUSIONES

De lo expuesto en este artículo se desprenden algunas conclusiones a tener en cuenta en nuestros procesos de enseñanza aprendizaje.

Los recursos de la Red permiten una mayor interacción docente – estudiante, en tanto que es posible cerrar la brecha generacional reflejada en los diferentes entornos de uno y otro responsable de los procesos de enseñanza aprendizaje.

La deficitaria formación en visualización espacial se puede superar con el uso de mediadores virtuales como el proyecto Descartes, permitiendo diseñar mejores representaciones que capturen propiedades difíciles de representar en dos dimensiones.

Las representaciones planas generan un pensamiento plano de la realidad, generando hábitos que dificultan una mejor interpretación de los objetos de nuestra realidad.

Es necesario revisar nuestros currículos de cara a incorporar las TIC como mediadores de aprendizaje y recuperar, en parte, el pensamiento 3D.

REFERENCIAS.

ECHEVERRÍA, J. (1999). *Los señores del aire: Telépolis y el tercer entorno.* Barcelona: Destino.

HART, W.J. (2004). Effects of computer animation on spatial visualization skills. *ASEE Southeast Section Conference*, pp. 1-9.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics.* Disponible en: http://www.nctm.org/standards/default.aspx?id=58 [Consultado el 2 de febrero de 2009].

NEGROPONTE, N. (1995). *El mundo digital.* Traducido por M. Abdala. Barcelona: Ediciones B, S.A.

PAPERT, S. (1993). *The children's machine: rethinking school in the age of the computer.* New York: Basic Books.

WITTGENSTEIN, L. (1953). *Philosophical investigations.* Traducción de G. E. Anscombe. Oxford: asil Blackwell Ltd, 1983.