

MATEMÁTICAS MANIPULATIVAS CON DESCARTES

José Luis Alcón Camas, I.E.S. Baelo Claudia, Tarifa (Cádiz) y Proyecto Descartes (Instituto de Tecnologías Educativas –ITE-, Ministerio de Educación)

José R. Galo Sánchez, *Dpto. de Matemáticas de la Universidad de Córdoba y Proyecto Descartes (ITE)*

Juan G. Rivera Berrío, Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín (Colombia) y Proyecto Descartes (ITE)

descartes@cnice.mec.es

RESUMEN.

En etapas formativas tempranas el cálculo, el fomento del razonamiento y en general el desarrollo cognitivo se fundamenta y formaliza mediante juegos, retos y actividades manipulativas que promueven el ingenio y la elaboración de estrategias. La manipulación nos mantiene en nuestro entorno y contexto inmediato, llevando al alumnado a la interiorización y al aprendizaje significativo. aprenden los conceptos mediante canciones, dibujando, recortando, moldeando plastilina... se llega a las Matemáticas a través de otra matemática. etapas formativas posteriores esos procedimientos suelen aconteciendo un predominio de la formulación abstracta que se centra en el aprendizaje de técnicas y planteamientos generales, abordando una resolución global y genérica. Pero en este modelo la abstracción aleja de entorno y contexto próximo, lo que dificulta la interiorización y el aprendizaje de los conceptos.

En la situación descrita se ubica la experiencia que presentamos y en la que se plantea cómo la utilización de mediadores virtuales favorece globalmente tanto la formación matemática abstracta como la concreta. Los mediadores virtuales facilitan y permiten un aprendizaje significativo basado en la propia experimentación, como base para adquirir experiencia, todo canalizado y/o catalizado por ellos. Uno de esos modelos se construye desde la aplicación de los mediadores virtuales desarrollados dentro del proyecto Descartes del Ministerio de Educación de España, un proyecto cuyo objetivo principal es promover nuevas formas de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas integrando las TIC en el aula como herramienta didáctica, pero entendiendo un aula no solamente como el grupo de alumnos y alumnas ubicados en un espacio físico cerrado, propio de una enseñanza presencial y reglada, sino también como un espacio virtual que abarca la "aldea global" nombrada por McLuhan y Powers. Utilizando diversas unidades didácticas interactivas de Descartes mostramos cómo se produce el aprendizaje en el modelo manipulativo planteado.

Nivel educativo: Educación Secundaria.

Palabras Clave: Descartes, mediador virtual, razonamiento, manipulación,

aprendizaje, TIC



1. INTRODUCCIÓN

Las Matemáticas poseen una intrínseca diversidad tanto en su génesis como en el planteamiento metodológico utilizado en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En etapas formativas tempranas el cálculo, el desarrollo cognitivo y el fomento del razonamiento se fundamenta y formaliza, usualmente, mediante juegos, retos y actividades manipulativas que fomentan el ingenio y la elaboración de estrategias de resolución en un ambiente lúdico concreto. En particular, las matemáticas de los primeros años de la Escuela tienen un origen, una motivación y una aplicación directa en el entorno cercano del alumnado. Por ejemplo, se asimila el concepto de cantidad y su necesaria cuantificación palpando y agrupando objetos tangibles. Pero esa concreción no es óbice para que, de manera natural y cuasi innata, se interiorice el concepto de número como tal, pues se observa como grupos de objetos diferentes: lápices, dados, piezas de madera, etc., que tienen la misma cantidad de elementos, representados por un mismo símbolo que se asocia unívocamente a cada cuantía. La manipulación nos mantiene en nuestro entorno y contexto, llevando a la interiorización y al aprendizaje significativo del concepto. Adicionalmente es un aprendizaje global no compartimentado, para el que no es necesario citar ni la transversalidad, ni la interdisciplinariedad, pues surge implícita a la actividad. Se aprenden los conceptos mediante canciones, dibujando, recortando, coloreando, amasando barro plastilina... se llega a las Matemáticas a través de otra matemática.

En ese contexto surge la Geometría, como en sus orígenes, al realizar trazados de segmentos rectos y curvos, al combinarlos para formar triángulos, cuadrados, rectángulos... que adquieren personalidad y distinción al colorearlos y recortarlos, al reagruparlos formando mosaicos donde la simetría y la asimetría surgen como dualidad irreconciliable o conciliable porque una es la que da existencia a la otra. Y a la vez se nombran sus elementos más importantes (vértices, lados, ángulos) y se clasifican o al menos se distinguen algunas propiedades. Y también es posible adentrarse en el espacio a través de construcciones partiendo, entre otras posibilidades, de desarrollos planos, por ejemplo el del cubo (*Figura* 1), y en su elaboración se puede apreciar fácilmente que los pequeños errores que se suelen cometer al recortar o al doblar las aristas afectan al resultado esperado, reflejando como cada cuerpo geométrico viene definido por unas propiedades intrínsecas y descubrir y aprender éstas.

En etapas formativas posteriores esos procedimientos suelen decaer aconteciendo un predominio de la formulación abstracta que busca el aprendizaje de técnicas descritas en esquemas y planteamientos generales y se aborda una resolución genérica para que, finalmente, partiendo de ella se aborde la concreción o aplicación como caso particular

Málaga 6 al 10 de julio de 2010

en la realidad cercana. Pero en ese modelo la abstracción nos aleja de nuestro entorno y contexto, dificulta la interiorización y el aprendizaje del concepto, llevando usualmente a escuchar reiteradas y cansadas preguntas del estilo: ¿Y esto para qué sirve?

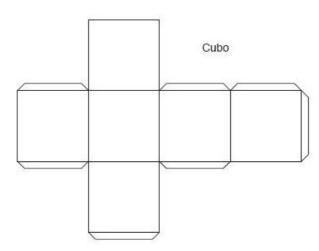


Figura 1. Desarrollo plano del cubo, uno de los primeros poliedros que construimos.

Y a ello se une un contexto cultural y social que evoluciona velozmente principalmente teniendo como base de cambio a las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC), entorno en el que los autores también nos preguntamos: ¿Por qué seguimos, los medios pasivos comunicación?, utilizando de oportunidades de comunicación interactiva brindan hoy Internet y los mediadores virtuales?, ¿estamos constituyendo, como lo afirma Castells (2001), una nueva era, llamada la Sociedad red?

El comienzo del siglo XXI se caracteriza por la presencia de dos generaciones de docentes en el nuevo mundo de las TIC: por una parte, la antigua generación que evidencia su necesidad de migrar al nuevo universo o tercer entorno, en tanto que las posibilidades que brindan las TIC se constituyen en una seria amenaza para sobrevivir y competir, y por otra parte, surge una nueva generación llamada por Prensky (2001) de los nativos digitales y por Castells (2001) generación red.

En 2009, los miembros de la generación red desconocen la existencia de los CD, poco o nada leen en un periódico impreso, usan Internet para chatear con sus amigos y bajar música o películas y, en sus ratos libres, no se despegan de su "iPod". Tienen teléfonos móviles, suben sus fotos a "tuenti" o "facebook" que comparten con el resto de sus amigos (Zanoni, 2008, pág. 15). Es una generación cuyos hábitos no soportan una comunicación pasiva y aburrida, tal como lo advertía tempranamente Prensky (2001, pág. 5). Los nuevos medios, que se caracterizan por su alto componente de interactividad, son espectadores de una batalla entre generaciones dispares: los tradicionales receptores



pasivos, textuales, asincrónicos y secuenciales compiten con los emergentes seres o nativos digitales (Negroponte, 1995). Estos nuevos seres se caracterizan por su interactividad, porque han reemplazado los textos por los contenidos hipertextuales, porque no soportan la comunicación asíncrona y, especialmente, por constituirse en seres multitarea.

La antigua generación reconoce su imposibilidad de comunicarse o restablecer relaciones sin poseer, al menos, un móvil y una dirección de correo electrónico. Saben que los nuevos medios han permitido una comunicación más efectiva, que elimina las barreras de exclusión para la manifestación de las ideas, sean éstas simples opiniones o resultados genuinos de investigación. En este nuevo entorno versión 2.0 (o cualquier otra versión) sólo son posibles las comunicaciones interactivas. La comunicación top-down de uno a muchos, como en el proceso tradicional de enseñanza-aprendizaje, ha dado paso a la comunicación de muchos a muchos. En esta nueva revolución social y cultural se presentan nuevos modelos educativos, entre ellos el Proyecto Descartes (1998), que ponen en cuestión a los modelos tradicionales, es el imperio de la red en la que la generación red es su creador. El antiguo ciudadano perderá la batalla y migrará a la nueva generación.

Y en el contexto descrito se ubica el trabajo que presentamos y en el que se plantea cómo la utilización de mediadores virtuales favorece globalmente tanto la formación matemática abstracta como la concreta. Planteamiento en el que el núcleo interactivo para páginas educativas (nippe) Descartes da una respuesta acertada, manteniéndonos en un ámbito manipulativo cercano a la experiencia primaria, usual y habitual que se adquiere en el contexto o entorno vivencial próximo y a la vez ubicándonos, situando el proceso de enseñanza-aprendizaje, en la Sociedad y generación red a la que pertenecemos.

2. MATEMÁTICAS MANIPULATIVAS CON MEDIADORES VIRTUALES.

La Sociedad Red, basada en las TIC, ha dado acceso, ha hecho viable el diseño y realización de procedimientos y modelos educativos que son implementados en sistemas informáticos y que permiten mejorar las representaciones, interactividad introducir persona-máquina consecuentemente permite la modelación objetos, de situaciones y hechos mejorando la percepción. Los mediadores virtuales nos facilitan y permiten un aprendizaje significativo basado en la propia experimentación, como base para adquirir experiencia, todo canalizado y/o catalizado por ellos.

Uno de esos modelos se construye desde la aplicación de los mediadores virtuales desarrollados dentro del proyecto *Descartes* del

Málaga 6 al 10 de julio de 2010

Ministerio de Educación. Descartes es un proyecto cuyo objetivo principal es promover nuevas formas de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas integrando las TIC en el aula como herramienta didáctica. Pero entendiendo un aula no solamente como el grupo de alumnos y alumnas ubicados en espacio físico cerrado, propio de una enseñanza presencial y reglada, sino también como un espacio virtual que abarca la "aldea global" nombrada por McLuhan y Powers (1993), pues los mediadores o escenas interactivas de *Descartes* pueden integrarse en los servicios y herramientas de la Web clásica y también en la ahora llamada Web 2.0 o Web social, potenciando la comunicación y haciendo efectivas las estrategias educativas al hacer uso de los múltiples carácter interactivo. Las redes sociales virtuales y los blogs, entre otros, son sólo un asomo de los recursos disponibles. La interactividad de los blogs se da a través de los comentarios que crean la comunidad virtual, la comunicación permanente es posible con herramientas instantáneas y los mediadores virtuales fortalecen la comunidad. Y en torno a Descartes y otros proyectos del Ministerio ha surgido una red de profesorado, la red "hermanamientos escolares desde las aulas" o red heda (2007), en la que se comparten e intercambian iniciativas, información, recursos y se desarrollan procesos educativos basados y realizados con TIC donde se pueden aprender y se aprenden Matemáticas de otra forma. Un ejemplo lo encontramos en la "Gymkhana Matemática en Sevilla" (Flores et al., 2009) primer premio europeo 2009 de "e-twinning" donde podemos poner de manifiesto, mostrar, que también en el nivel de secundaria es posible resolver problemas inmersos en un contexto donde la motivación está provocada por el juego y el reto, donde el aula se extiende físicamente a varios países y donde el profesorado y alumnado colabora y aprende conjuntamente, formándose competencialmente, sin más que integrar el proceso de enseñanza-aprendizaje en la Web 2.0 y usando como mediadores las escenas interactivas de Descartes.

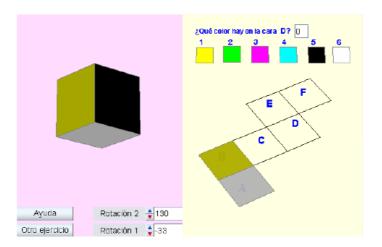


Figura 2. Ubicando colores



En la introducción acudíamos a la manipulación de una hoja de papel para la construcción de un cubo, y a continuación mostraremos cómo esta actividad se puede trasladar a otros niveles mediante una escena interactiva de *Descartes*, pudiendo con ella poner en evidencia cómo se puede promover el desarrollo cognitivo, cómo se puede fomentar la ubicación espacial, cómo llegar a la abstracción y a la manipulación mental y cómo introducir la necesaria discusión y análisis de las respuestas asimilando la no necesaria unicidad de éstas. Son matemáticas manipulativas con mediadores virtuales.

En la Figura 2 se plantea a partir del cubo representado en la zona izquierda de la pantalla, y que el usuario o usuaria puede girar seleccionándolo y desplazando el ratón en la escena original¹, realizar el desarrollo plano del mismo mentalmente y determinar el color que ha de ubicarse en un determinado cuadrado del desarrollo que se identifica por una letra. Somos conscientes que usted ya está tratando de efectuar ese desarrollo mental y estará experimentado el esfuerzo y dificultad del salvo que disponga de la suficiente ya entrenamiento y situación espacial para la resolución de este tipo de problemas. No obstante aquí, si sólo está leyendo este texto, tiene la adicional de poder interactuar no con Independientemente de ello ya habrá realizado su proceso resolutivo y habrá establecido su respuesta. Pero no se ofusque en ella, por mucho que vuelva a comprobarla, pues no dude que alguien igual de ofuscado que usted también le podrá aportar una respuesta diferente que será también cierta. Como adelantábamos no hay unicidad en la respuesta dado que el proceso mental, o tangible si lo reproduce con un papel, que ha realizado para llegar al objetivo es dependiente del sentido en que haya realizado el plegado (Figura 3) y le conducirá a la permutación de dos caras.

Un mediador virtual puede facilitar la construcción del pensamiento conformando esquemas de razonamiento en los que, adicionalmente a la acción virtual ya señalada de giro voluntario con el ratón, se pueden introducir ayudas que ubicando espacialmente aporten técnicas resolutivas que no son más que manipulaciones adecuadas del objeto en el entorno virtual de aprendizaje en el que se sitúa. Manipulaciones que pueden ahorrar una gran cantidad de palabras al ser sustituidas por animaciones visuales. Por ejemplo en la *Figura 4* nos encontramos en un clásico problema de determinar la proyección ortogonal de las seis vistas posibles de ese objeto y en ella la escena² proporciona, además de la corrección

1

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales didacticos/relaciones espacial es/escena3.htm . En la escena aquí enlazada se deshace la ambigüedad descrita en el texto al indicarse el sentido del plegado que ha de aplicarse.

TICEMUS 2010
TECNOLOGÍAS DE LA
INFORMACIÓN Y LA
COMUNICACIÓN EN
EDUCACIÓN
MATEMÁTICA EN

SECUNDARIA

Málaga 6 al 10 de julio de 2010

automática de la respuesta que se aporta, la obtención de esa proyección según se refleja en la *Figura 5*. O diferentes modalidades con similar objetivo como podemos observar en la *Figura 6*, donde la manipulación directa del objeto en la escena³ puede ir acostumbrando al usuario o usuaria a visualizar mentalmente la figura girada que se corresponde con la solución. Manipulación virtual para ayudar a la manipulación mental. O la construcción de modelos como vemos en la *Figura 7*. O modelos que contribuyen a la construcción o preparación de conceptos como puede observarse en el ejemplo⁴ de la *Figura 8* donde se introduce lúdica e indirectamente el concepto de área.

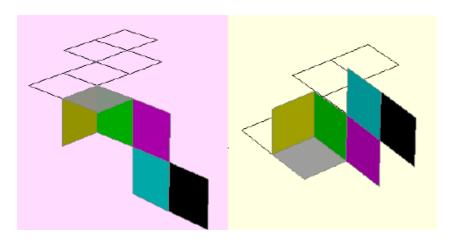


Figura 3. Plegado del desarrollo de un cubo coloreado. Hay dos procedimientos y los cubos obtenidos son diferentes.

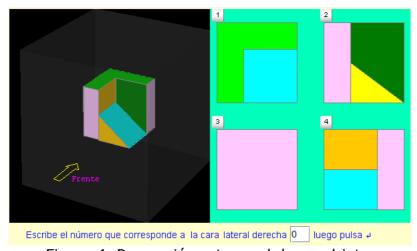


Figura 4. Proyección ortogonal de un objeto.

2

 $\frac{\text{http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales}}{\text{ml.}} \text{didacticos/vistas/escena12.ht}}{\text{ml.}}$

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales didacticos/relaciones espacial es/escena10.htm

Málaga 6 al 10 de julio de 2010 TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN UNIVERSIDAD Y SECUNDARIA

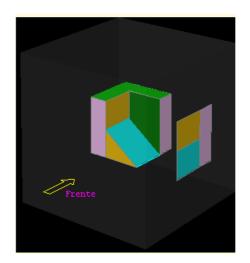


Figura 5. Modelación de la proyección mediante una animación en la escena original.

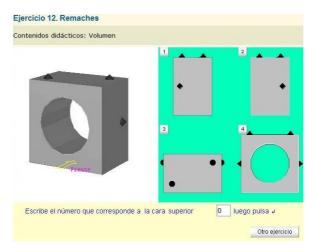


Figura 6. Identificación de una cara

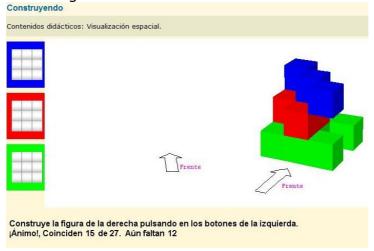


Figura 7. Construyendo con *Descartes*

Málaga 6 al 10 de julio de 2010



Figura 8 Elaboración de conceptos con Descartes

Pero son sólo unos pocos ejemplos de las posibilidades y del potencial educativo que encierra *Descartes* como mediador virtual, como herramienta que ayuda a dar continuidad a las matemáticas manipulativas de la primera enseñanza. Los recursos educativos del proyecto Descartes pueden consultarse en la web del proyecto accesible desde la dirección http://recursostic.educacion.es/descartes/web/.

3. CONCLUSIONES

El proyecto *Descartes* tiene como principal finalidad promover nuevas formas de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas integrando las TIC en el aula como herramienta didáctica. Aparece en el año 1998 aprovechando las circunstancias que se dan en este nuevo siglo, tanto desde el punto de vista económico y tecnológico como social, como es el abaratamiento de los equipos informáticos, la aparición de las líneas de alta velocidad para la transmisión de datos, la utilización generalizada de Internet a bajo coste, etc., y en particular el interés de muchos profesores de matemáticas por las TIC.

El proyecto *Descartes* ofrece materiales didácticos para el aprendizaje de las matemáticas que favorecen la posibilidad de usar metodologías: **activas**, en las cuales el alumno es protagonista de su propio aprendizaje; **creativas**; en las cuales los alumnos toman decisiones durante el proceso de aprendizaje; **cooperativas**, en las cuales se trabajan los conceptos y procedimientos por parejas o en pequeños grupos e **individualizadas**, en las cuales cada alumno puede ir



Málaga 6 al 10 de julio de 2010

a su ritmo y tener atención personalizada. Son mediadores virtuales en el aprendizaje.

Como miembros del grupo *Descartes* hemos desarrollado materiales didácticos, permitiendo con ello compartir experiencias y confrontar las ventajas del uso de estas nuevas tecnologías en el aula (Galo, 2008 y Galo y Cañas, 2006). Nuestro propósito, en algunas de las unidades didácticas diseñadas, es determinar en el ámbito o contexto geométrico las dificultades en la visualización espacial, que permita formular estrategias hacia representaciones más efectivas, conducentes a la comprensión de los conceptos matemáticos propios de cada unidad (Rivera *et. al.*, 2009).

Lo importante de estas actividades, en el contexto de este trabajo, es la acción como "mediador virtual", que permite una interacción mucho más atractiva para los intérpretes o actores, usuarios, del escenario seleccionado. Una manipulación que permite construir las matemáticas. La posibilidad de interactuar con objetos acerca al estudiante a un mundo de representaciones análogo al mundo en el que crece y se desarrolla, el tercer entorno.

Planteamos la necesidad de abordar la capacidad de abstracción como un objetivo más dentro de la educación matemática, pero estimamos que dicha opción es posible abordarla con matemáticas manipulativas utilizando mediadores virtuales, con escenas interactivas de las que hemos mostrado algunos ejemplos y actividades, a diferentes niveles.

El planeamiento de actividades manipulativas basadas en materiales clásicos (papel, plastilina, barro, etc.) requiere una dedicación temporal amplia y una habilidad manual no accesible a todos. La posibilidad de interactuar con las nuevas tecnologías agiliza el proceso a través de la simulación, de la modelación y queda a disposición de cualquier nativo o inmigrante digital. La diversidad de los ejercicios con un mismo objetivo educativo, a través de la aleatorización de parámetros, contribuye a que la construcción de estrategias se haga habitual y que la capacidad de abstracción se construya significativamente.

Y ¿por qué Descartes? Descartes es un proyecto consolidado, con más de una década de desarrollo, resultado del trabajo de un grupo de docentes comprometidos con la Educación procedentes de toda España y de otros países latinoamericanos, entre ellos Colombia de dónde es uno de los autores, y está promovido por la Administración Pública. Los materiales de Descartes están bajo Licencia Creative-Commons que permite la difusión y realización de obras derivadas bajo las condiciones de reconocimiento de autoría, no comercial y compartir igual. Todo ello aporta una garantía de rigor, continuidad y evolución del proyecto.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- FLORES, P., ALCÓN, J.L., GRECIANO, A. y LÓPEZ DE SAGRADO, M.D. (2009). *Mathematical Gymkhana in Seville.*
 - http://ficus.pntic.mec.es/~pflf0000/089 FUSURUP/089 gymk/welcome gymkhana.htm
- CASTELLS, M. (2001). *La Galaxia Internet*, (R. Quintana, Trad.), Plaza & Janés editores, S. A., Barcelona.
- GALO, J.R. (2008) Aprendizaje continuo en el aula. *I Congreso de Internet* en el aula.
 - http://descartes.cnice.mec.es/heda/difusion/materiales/ia08/Jose R Galo.pdf
- GALO, J.R. y CAÑAS, J.J. (2006) Análisis de una experimentación constructivista con TIC en el aprendizaje de las matemáticas. X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huesca.
- McLUHAN, M., Y POWERS, B. R. (1993). La Aldea Global. Gedisa, Barcelona.
- NEGROPONTE, N. (1995). *El mundo digital.* (M. Abdala, Trad.), Ediciones B, S.A., Barcelona.
- PRENSKY, M. (2001). Digital Natives, Digital Immigrants. *On the Horizon* , 9 (5), 1-6.
- PROYECTO *DESCARTES* (1998). Instituto de Tecnologías Educativas, Ministerio de Educación. http://recursostic.educacion.es/descartes/web
- RED Buenas Prácticas 2.0 (2007). Instituto de Tecnologías Educativas, Ministerio de Educación. http://recursostic.educacion.es/buenaspracticas20/web/
- RIVERA, J.G., ALCÓN, J.L. y GALO, J.R. (2009) Desarrollo de estrategias con Descartes. XIV JAEM, Girona.
 - http://descartes.cnice.mec.es/heda/difusion/materiales/xivjaem/desarrollo estrategias des cartes.pdf
- ZANONI, L. (2008). El imperio digital. Ediciones B, Buenos Aires.