Nuevas tecnologías y enseñanza: Introducción constructiva,geométrica y dinámica del concepto de derivada

C. Caballero, J. Bernal

I.E.S. Portada Alta,
Málaga,
Spain

Abstract

Mucho se habla de las TIC y de las nuevas posibilidades que abre en educación, en particular es especialmente destacable el papel que puede jugar en las clases como una herramienta útil para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos, poder realizar conjeturas, economizar el tiempo del docente en la búsqueda de recursos y servir como una nueva vía de comunicación que retroalimente más rápidamente este proceso de mejora continua del proceso.

En esta comunicación vamos a presentar una unidad interactiva que se centrará en la introducción del concepto de derivada en bachillerato, su asimilación y adquisición contraponiéndolo con la vía clásica de la derivada motivada por el estudio de la tangente a la gráfica de una función; que es un tanto artificial a nuestro juicio abordar así la cuestión, y que normalmente termina chocando para el alumnado con el clásico teorema que nos dice que "derivabilidad implica continuidad" y esas ideas intuitivas en forma de receta mágica como "suavidad", "forma un pico", etc. Este nuevo enfoque será posible gracias al uso de las TIC, en particular será muy destacado el uso del software gratuito Geogebra pues permite profundizar si uno lo prefiere en el propio enfoque como límite, pero además permite mostrar al alumnado conceptos como cercanía, entorno o pendiente infinito sin esfuerzo imaginativo. Nuestra unidad con un afán construccionista, donde el alumnado deberá aprender mediante la experimentación, consistirá en una pseudoinvestigación guida donde se repase desde la elemental recta (dos puntos en el plano, punto y vector director, expresiones. . .) en el que la propia fórmula cobrará vida. La ventaja de este soporte es que los propios alumnos podrán colgar sus dudas al integrar un foro en un formato web y a su vez permitiría mejorar el propio formato al ser reconstruible, algo que es impensable en el formato tradicional de libro.

Finalmente se introduce el concepto de función derivable en un punto como ser localmente como una recta que se basa en la idea que si pudiéramos ampliar un entorno de la gráfica que fuera cada vez más pequeño, claramente vemos una recta (por lo que ser continua y tener pendiente será entonces algo natural). Este modelo, cuyo interés en su construcción ya es de por sí interesante para el alumnado de este nivel lo hemos bautizado como "la lupa matemática". Este enfoque en cursos superiores universitarios de hecho es el que se suele usar en Cálculo diferencial. Después

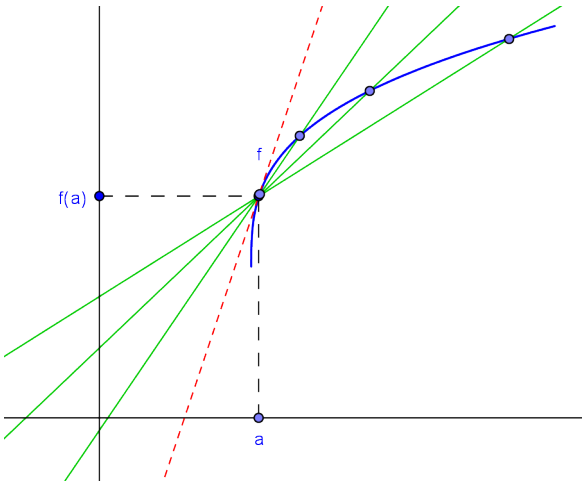

Figura 1: El problema de la tangente

de observar ejemplos básicos de discontinuidad y como consecuencia de haber ido trabajando sobre entornos con la lupa, el hecho de plantear la búsqueda de dicha recta tangente como un límite es entonces natural y hasta la infinitud tiene una interpretación nada forzada y obvia. Se destierran coletillas como "suavidad" y "picos", para tener un significado construido y a la vez hemos repasado varias ideas de geometría, con toques de álgebra y desarrollando el sentido crítico que han de tener los alumnos en esta rama del conocimiento como una oportunidad para aprender. Seguidamente se presentan modelos de los resultados clásicos de derivabilidad.

Keywords: TIC, interactividad, derivada, conceptos – Geogebra

---

1. Introducción: Una crítica a una introducción clásica del concepto de derivada

Casi todos los libros de Matemáticas a nivel de bachillerato recurren, a la hora de introducir el concepto de derivada de una función en un punto al estudio del problema de la recta tangente a la gráfica de dicha función en dicho punto.

Se les explica a los alumnos que dados dos puntos es posible trazar una recta que los une como bien recuerdan, pero saben que por un punto es posible trazar infinitas rectas. Seguidamente se les hace algunos dibujos esquemáticos para convencerles, planteándoles el citado problema. Se les habla del concepto de tangente como aquella recta que corta a la gráfica sólo en dicho punto y a continuación se les invita a tantear como dibujarla a ojo. Entonces se les induce a pensar que el proceso a seguir para conseguir este fin de forma más "rigurosa" es mediante el siguiente proceso acompañado de un dibujo (con distintas variantes según el docente y la rigurosidad que emplee en dicho proceso):

"Supongamos que tenemos una función cuya gráfica corresponde al dibujo y un punto $(a, f(a))$ que queremos aproximar con una recta en dicho punto de la mejor forma posible. Si tomamos un cierto valor $h > 0$ y consideramos el punto de la gráfica $(a+h, f(a+h))$ uniéndolo con el anterior obtenemos una recta de pendiente:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

Haciendo tender h a 0 vemos intuitivamente que gráficamente se tiende a un solo punto y entonces la pendiente de la recta que buscamos se corresponde con el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

Se puede optar también por la expresión equivalente de cálculo haciendo uso de la variable x y luego hablar por límite por la derecha e izquierda para llegar a la definición propiamente dicha:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3}$$

Finalmente remarcarles al alumnado que sólo se necesita la pendiente de dicha recta porque a partir de esto y el punto $(a, f(a))$ es posible obtener la expresión de la ecuación de la recta."

Concluida la introducción del concepto, se procede a trabajar a través de ejercicios, se ven los clásicos de no existecia del límite y se dan trucos tales como: "no es derivable porque hay un pico" , "no es derivable porque por la izquierda y la derecha no coincide", etc.

1.1. Problemas asociados

1. Hemos de notar que esta forma de introducir el concepto está guiada de forma que el alumnado debe procurar seguir pasivamente las ideas que le van llegando por parte del docente y hacer un esfuerzo en retener conceptos y visualizarlos bastante considerable.
2. Puede ser necesario y aconsejable previamente anticipar recordando lo esencial respecto a la recta en el plano, su representación y las ecuaciones que necesitamos con el objetivo de que no sea un obstáculo a la hora de afrontar el nuevo concepto. A estas alturas de sus estudios, es fácil que el alumnado se pierda en el hecho de que se vayan usando distintas ecuaciones de la recta a lo largo del curso y plantearse cuestiones personalmente como cuántas ecuaciones necesita realmente aprender. ¿Son todas realmente necesarias? ¿Se pueden generar de forma intuitiva unas en base a otras para adaptarlas al contexto?
3. En palabras de Llorens (1999), conceptos tan intuitivos que intervienen en esta introducción como "curva", "recta", "tangente" y "punto"; puede diferir la idea conceptual que tenga el alumnado y la propia definición formal. No sería de extrañar que en futuros ejercicios al pedirles una recta tangente nos respondan dando la derivada, porque al fin y al cabo hemos jugado con esa asociación desde el principio.
4. Un problema generado por esta introducción es evitar, como hacen los libros de texto, el afirmar en los límites que aparecen, que su existencia está ligada a ser un número real y su relación con un cociente. No olvidemos que cuando se llega a este concepto ya el alumno ha escrito y visto límites del tipo:

   $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \tag{4}$$

   Y evidentemente, surgirán situaciones particulares de no derivabilidad por ser infinito (por ejemplo: $y = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$), teniendo el límite un claro componente geométrico e intuitivo: *La pendiente de una recta perpendicular al eje de abscisas, lo cual significa que la correspondencia derivabilidad y el problema de la tangente difieren.*
5. Como ya se dijo al citar esta introducción, parece más adecuado usar la expresión de la derivada de la forma:

   $$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{5}$$

No sólo por reforzar la relación con la pendiente de una recta, sino la aparición en la materia de los teoremas de Lagrange (también conocido como teorema del valor medio) y Rolle, y una poco probable aparición del teorema de Cauchy en muchos desarrollos últimamente de este tema en bachillerato; además de los beneficios de conjugar la expresión geométrica para seguir trabajando el bloque de geometría si precedió al bloque de análisis.

6. El gran problema de este enfoque es en nuestra opinión que se desvirtúa el gran objetivo de que el alumnado llegue a dar un sentido intuitivo a este concepto y se desligue al pasar al cálculo de derivadas, convirtiéndolo en algo prácticamente mecánico en base a unas reglas. Es lo que algunos pedagogos califican de la "educación parcheada": primero damos el concepto y luego conforme surgen las dudas las vamos subsanando. El gran riesgo por tanto es: ¿realmente se llega a la comprensión o se crea un hábito con cierta coherencia en la respuesta de los alumnos?

2. Nuestra propuesta para trabajar el tema

A la hora de abordar el trabajo sobre este concepto vimos necesario que se cumplieran una serie puntos:

- Trabajar de forma que el alumnado tuviera cierta autonomía, para lo cual un soporte web era la mejor opción dado que en los institutos disponen afortunadamente de muchos equipos informáticos y la gran mayoría del alumnado puede acceder al material desde el centro y desde sus casas. Esto además facilita el poder integrar referencias a otras webs relacionadas con multitud de contenidos, integrar comentarios y dudas, y creando una comunicación más fluida dentro de una clase, por ejemplo integrando un foro de dudas.

- La posibilidad en consecuencia de actualizar contenidos con la puesta en práctica es un gran valor añadido, algo impensable en el formato tradicional e implicar al alumnado en el propio proceso de su aprendizaje.

- El software gratuito base para nuestro trabajo es *Geogebra* por su exportabilidad web y la posibilidad de personalizar e interactuar con elementos del arbol DOM (*Document Object Model*) a través de código JavaScript. Además al estar Geogebra desarrollado en el lenguaje de programación Java, asegura su compatibilidad con la mayoría de sistemas operativos, lo cual facilita su presencia en internet y comunicación externa.

- Además, el desarrollo de esta aplicación requiría de múltiples funcionalidades que ofrece dicho software como analíticos (funciones, entornos), geométricos (segmentos, puntos, homotecias, lugares geométricos... etc.) y dinámicos (reconstrucción en tiempo real de los elementos que intervienen); así como la posibilidad de añadir elementos manipulables tanto desde Geogebra como desde la web, que pretenden no hacer necesario el conocimiento básico de esta herramienta con un afán claramente más abierto.

- Esta integración web además permitió hacer uso de un renderizador de expresiones matemáticas en JavaScript que permite visualizar las expresiones de las funciones que se introduzcan usando la sintaxis de Geogebra, para iniciar al alumnado en el manejo estándar de prácticamente cualquier software que permita realizar cálculos informáticos (desde Matlab, Derive, C++, Java...) como un valor añadido.

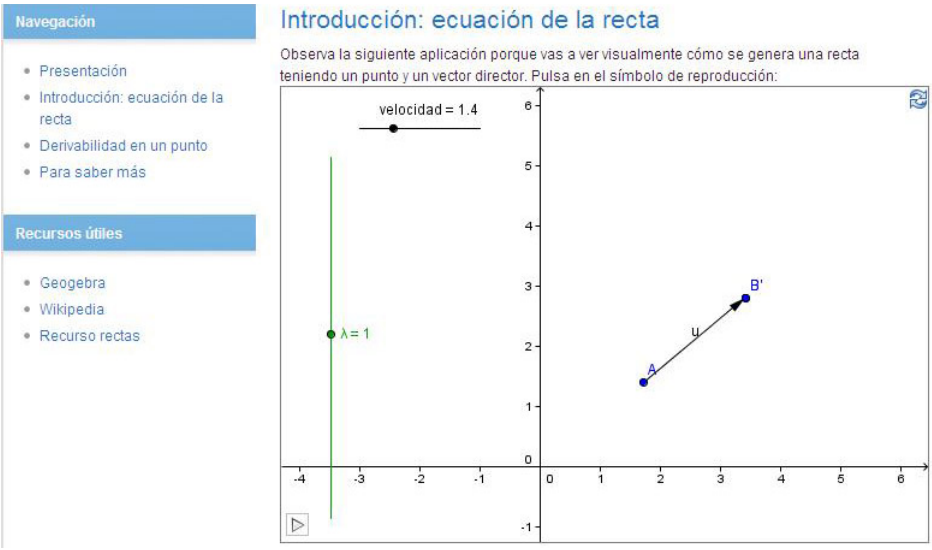

Figura 2: Primera aplicación, antes de la reproducción

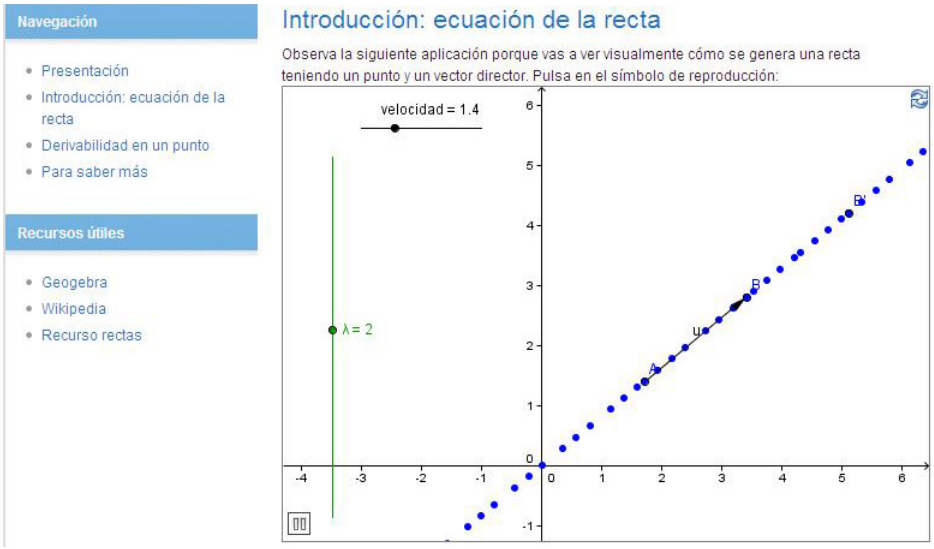

Figura 3: Primera aplicación, después de la reproducción

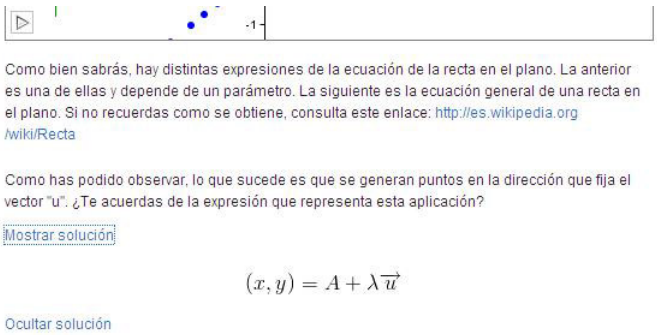

Figura 4: Capturas de la expresión oculta

3. Enseñando las funcionalidades de nuestra web

Como ya se ha dicho, hemos integrado en una web los elementos necesarios para poder desarrollar el tema en los términos previstos. Vamos a hacer un recorrido de los apartados y las características más importantes que se incorporan.

3.1. Introducción: La ecuación de la recta en el plano

En primer lugar es necesario recordar al alumnado los conceptos básicos de una recta y representación en un plano. En la web hay integradas dos pequeñas aplicaciones que ilustran la ecuación paramétrica de una recta y la ecuación general de una recta, pues son necesarias para poder comprender la forma en la que se introduce la derivabilidad.

En primer lugar se puede observar un punto y un vector director. Al reproducir la aplicación se observa lo que ocurre en las Figuras 2 y 3.

Lo que se hace es dilatar el vector director según el parámetro λ y aplicárselo a un vector, lo que queda claro a raíz de dicha secuencia. Se proporciona un enlace externo para que recuerden los conceptos básicos de la recta en el plano. A continuación se invita a recordar la expresión algebraica en la que se basa la aplicación que permanece oculta hasta que se pinche. Esta idea web es muy útil y es la que usamos constantemente. Esto se puede observar en la Figura 4.

Respecto a la segunda aplicación, la cual se puede ver en las Figuras 5 y 6, relaciona visualmente la ecuación general de una recta en el plano con su visualización gráfica. Dados los puntos A y B se observa la recta que los une y manipulándolos se ve que la ecuación cambia. Deben relacionar entonces posición de dichos puntos y expresión de la ecuación. Se les pone una pequeña investigación consistente en conseguir eliminar de la ecuación la variable y. Esto sólo lo conseguirán si ponen los puntos A y B verticales respecto al sistema de referencia, con lo que se podrá hablar de pendiente infinito con naturalidad.

3.2. Derivabilidad puntual de una función: La lupa matemática

Resulta fácil enlazar el concepto de derivada en un punto con el concepto de recta. Las razones son bastante obvias y podríamos hablar en términos muy pedagógicos, pero básicamente la idea es explotar el modelo de recta y representación (de ahí que se haga necesario refrescar el concepto) con el que el alumnado está muy familiarizado para crearles una idea intuitiva. Lo que se pretende es hablar de derivabilidad en un punto como parecerse localmente a una recta y de hecho se define así en la web:

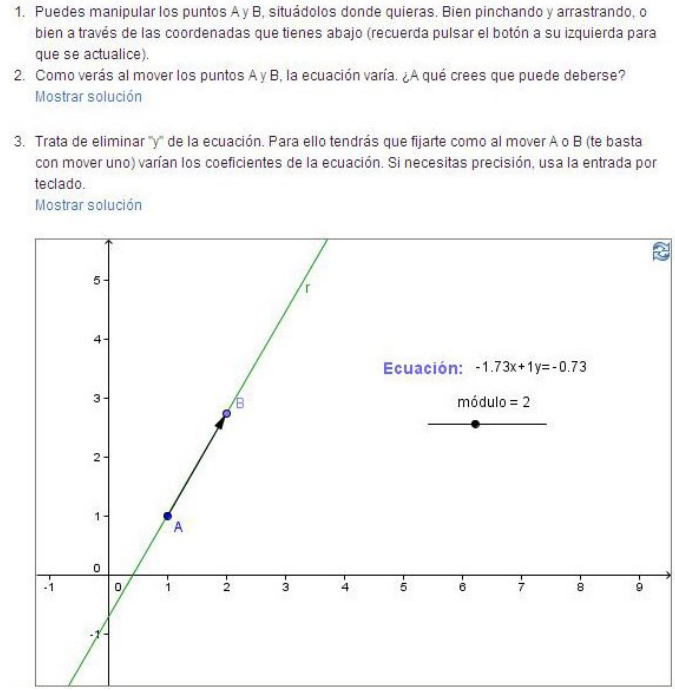

Figura 5: Segunda aplicación con la investigación visible

Definición: Diremos que una función es *derivable en un punto* si gráficamente es localmente indistinguible de una recta. Es decir, si al elegir un punto e ir ampliando sucesivamente, llegase un momento que no pudiéramos distinguirlas.

La inspiración de esta idea se le atribuye a Schultz (1995), aunque es la idea que se usa para generalizar el concepto de derivada a dimensión superior de un espacio n-dimensional a un espacio 1-dimensional. Las ventajas de trabajar sobre esta idea es que resultados posteriores como "derivabilidad implica continuidad" resulta más que evidente: Si una función es derivable en un punto, quiere decir que en un entorno suficientemente pequeño (o acercar nuestra lupa lo suficiente) nos supondrá no poder distinguir la gráfica de una recta. Por tanto, una recta es lo más continuo que conoce el alumno (lleva reforzando esta idea desde su más tierna infancia, por lo que es casi un concepto primitivo), así que la gráfica de dicha función intuitivamente es continua. También se puede trabajar negar este resultado en la misma línea.

Pero tiene beneficios más cercanos en el tiempo:

- Podremos decir que como ser derivable en un punto es parecerse a una recta localmente, obviamente la recta a la que se parece pasa por el punto $(a, f(a))$, porque lo hemos construido así. Al usar la forma clásica de introducir el concepto, se obvia el proceso previo que les llevó a Euler y Newton a afirmar que la recta que más se puede parecer a una recta pasa necesariamente por el punto. Es algo que se evita a drede y que se aprende en un nivel universitario, cuando sin embargo con la "lupa matemática" es algo obvio.

- Al parecerse, resulta fácil hablarles que les asignamos la pendiente de dicha recta al punto.

- Estamos preparando el terreno para enlazar con la definición formal de derivada, porque el concepto de localidad lleva asociado de por sí el concepto de límite como ya se habrá trabajado y seguiremos reforzando.

- Evitamos dar "recetas mágicas" a posteriori como criterios gráficos de no derivabilidad. Nos referimos a hablar de "suavidad", "picos", "no continuidad"... Una función que forme un pico, dará igual que ampliemos y ampliemos que no se convertirá en recta, algo que no es continuo se verá visualmente como un trozo de curva rota, lo cual no es parecerse a una recta. Por eso titulamos el artículo que introducimos el concepto constructivamente, partimos de los conceptos previos para con el nuevo reforzar lo conocido y reforzarlo, y a partir de ello construir el concepto.

Pasamos ahora a comentar la aplicación en sí y las funcionalidades extra, que se corresponden con la Figura 7. En la aplicación de Geogebra hay representada una función, un cuadro entorno a un punto y una ampliación de este. Se indica que se puede desplazar el punto a estudiar o modificarlo a través de teclado. Además se puede modificar la expresión de la función a través de una entrada de texto o seleccionando algunos ejemplos predefinidos de una lista. En cualquiera de estos casos, se mostrará por pantalla una expresión generada en LaTeX que da la expresión introducida de forma más amigable. Este añadido aporta como ventaja el familiarizar al alumnado con la forma de introducir cálculos matemáticos en software informático, desde matemáticos como Derive, Geogebra o Mathlab, a C++, Java entre otros lenguajes de programación. No olvidemos que este tema normalmente es tratado con cierta profundidad en alumnado de un bachillerato enfocado a las Ciencias.

Al situarse en un punto, se procede a disminuir el tamaño de nuestra lupa para a través de algunos ejemplos que se detallan en la web ir adquiriendo las ideas básicas de la definición. Esto se puede ver en las Figuras 8 y 9.

3.3. Para saber más

El trabajar sobre la introducción intuitiva, geométrica y gráfica puede dar mucho más de sí. En esta sección mostramos un modelo construido en Geogebra para demostrar visualmente los teoremas de Lagrange y Rolle.

Se pueden manipular los puntos de partida iniciales y se genera la gráfica de interpolación polinómica que los une. Se encuentra marcada en rojo el el segmento que une los extremos de la gráfica de esta función y se les anima al alumnado a que desplazando el punto G, que da la recta tangente, encuentren un lugar para el cual haya paralelismo y por tanto las pendientes sean las mismas. Además se les puede empezar a relacionar con el número de veces que esto ocurrirá que después surge de forma natural al plantearse el estudio global de una función.

Se le añadido como funcionalidad el poder establecer las coordenadas de los puntos extremos para poder dar precisión y situarse fácilmente en las condiciones del teorema de Rolle. Esto se puede ver en las Figuras 10 y 11.

Referencias

[1] Llorens, J.L. (1999). Visualización de la recta tangente a una curva. Educación matemática, Vol. 11, No 2, pp. 120-127.

[2] Shultz, H. (1995) Introduction to derivatives: a TI-81/TI-82 graphing calculator activity. Mathematics and computer education, Vol. 29, No. 2, pp. 120-123.

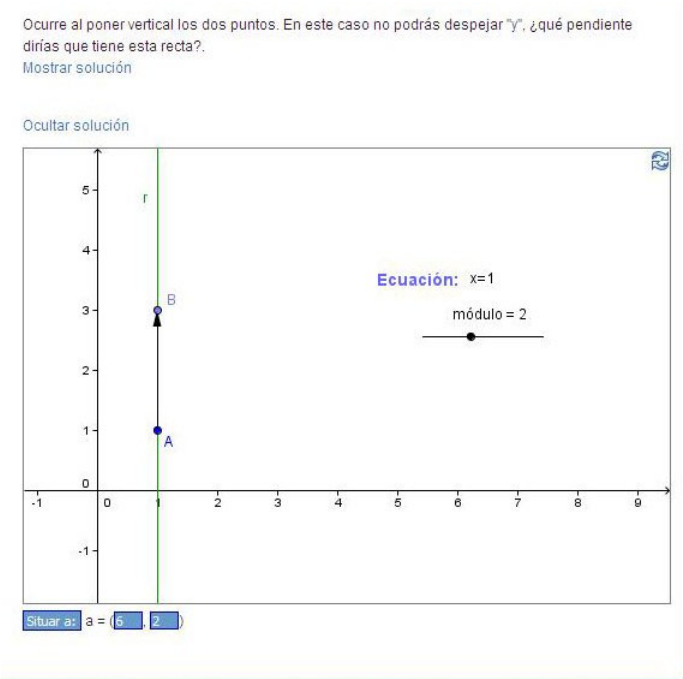

Figura 6: Solución gráfica a la segunda aplicación

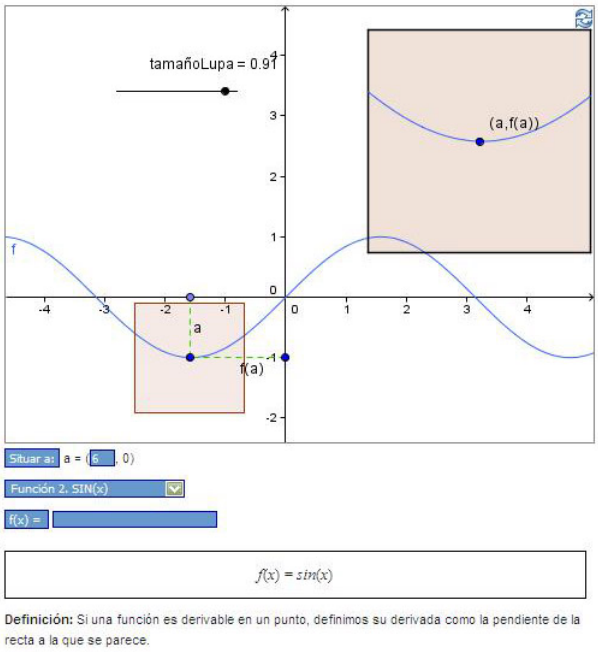

Figura 7: La lupa matemática

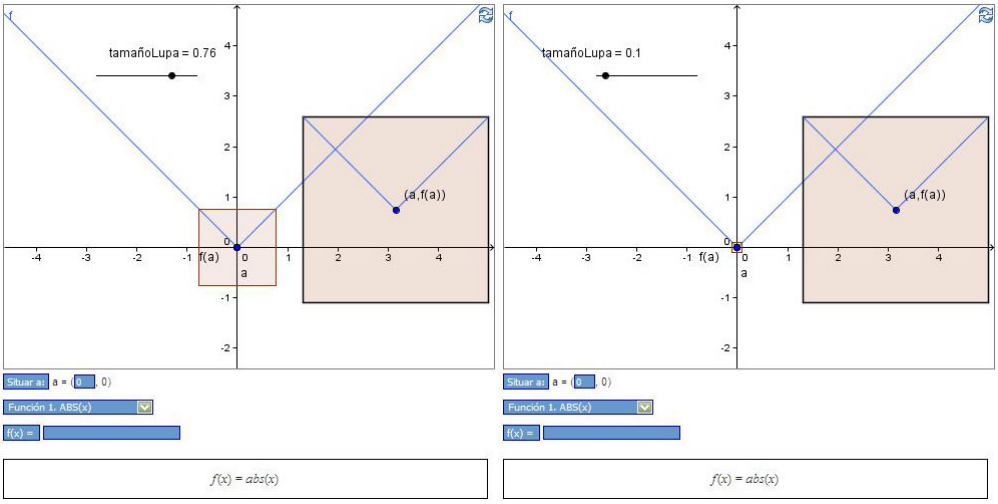

Figura 8: Imágenes de la función $f(x) = abs(x)$ y su no derivabilidad en 0

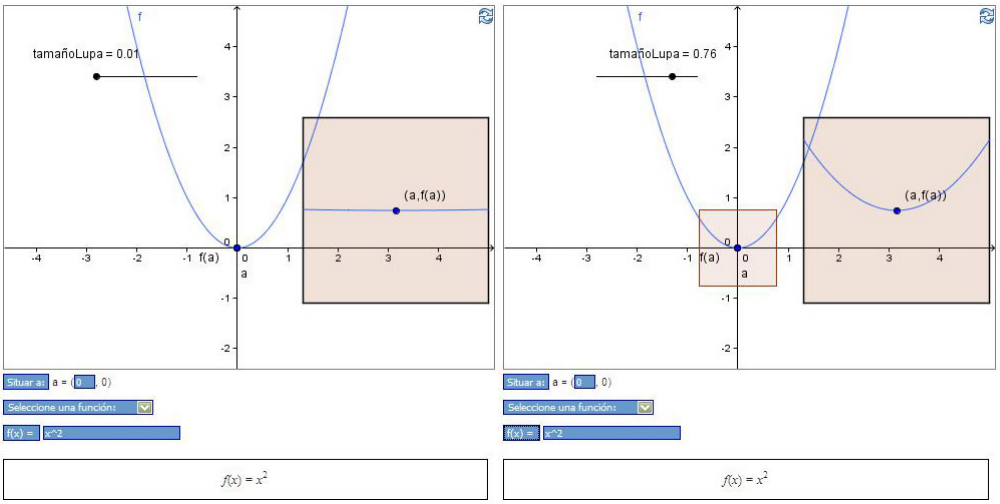

Figura 9: Imágenes de la función $f(x) = x^2$ y su no derivabilidad en 0

Para saber más

El teorema de Lagrange, también llamado del valor medio, afirma que si se unen dos puntos con una curva que es una gráfica de una función derivable, entonces la pendiente de dicha recta se alcanza para algún punto interior de la curva también. La forma de enunciarlo es muy diversa como puedes ver en: http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_valor_medio

También busca el teorema de Rolle que es un caso particular más sencillo si encuentras dificultades. En esta aplicación tienes marcada en rojo la recta que une los dos extremos y por medio tienes varios puntos que puedes manipular y arrastrar, incluídos los extremos. Se trata de que arrastrando el punto G, en algún momento de viajar desde (a,f(a)) a (b,f(b)) la recta tangente es paralela, y por tanto las pendientes iguales que es lo que afirma Lagrange.

Inténtalo hasta que te convezcas y luego, activando el botón que te ayuda a estar en las circunstancias del teorema de Rolle, verifica visualmente que se cumple.

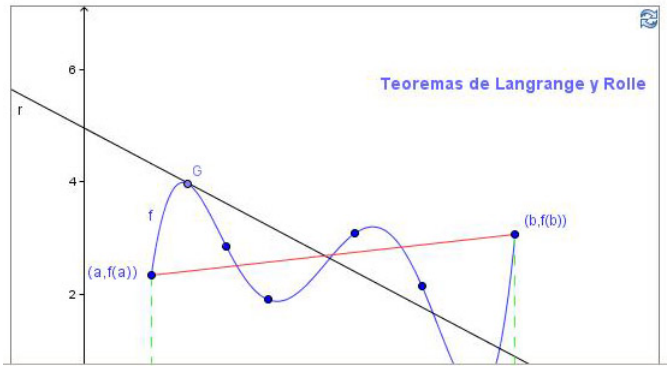

Figura 10: Aplicación de Teorema de Lagrange y Rolle

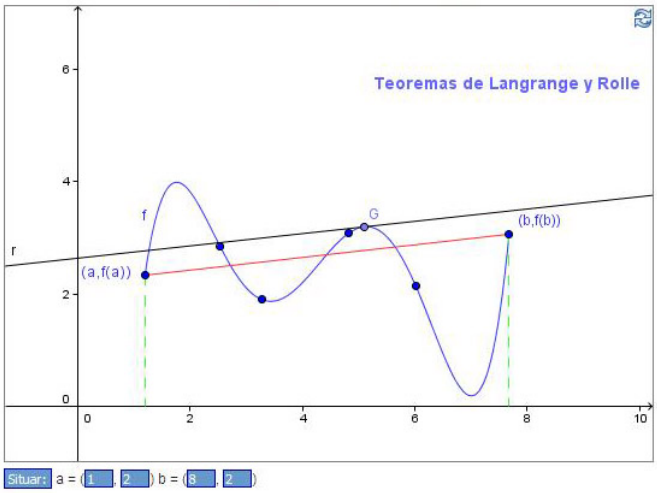

Figura 11: Demostración intuitiva del teorema de Langrange desplazando el punto G