Programación Recreativa versus Matemática Recreativa[a]

Ruiz Jiménez, Blas Carlos[†]
Ruiz Muñoz, Manuel[‡]

Resumen

La Programación Recreativa ($\mathcal{P}ro\mathcal{R}ec$) es la disciplina que motiva el estudio de la programación de computadores a través de problemas lúdicos. Los problemas típicos que estudia esta disciplina son similares a los de la Matemática Recreativa ($\mathcal{M}at\mathcal{R}ec$), lo que lleva a veces a identificar ambas disciplinas. Sin embargo, los métodos de una y otra pueden llegar a ser muy diferentes. El objetivo de la $\mathcal{P}ro\mathcal{R}ec$ es escribir programas, mientras que en $\mathcal{M}at\mathcal{R}ec$ podemos ayudarnos de éstos para enunciar conjeturas sobre la solución. Desde una visión educativa, son muy interesantes los puzzles lógicos y los problemas de teoría de números elemental (aquellos que se formulan con un conocimiento elemental o básico de la aritmética y el álgebra) que conducen al estudio de problemas no resueltos (la conjetura de Goldbach o la existencia de números perfectos impares). Exponemos en este artículo problemas que ilustran esta conexión: La forma general de los números de Zumkeller (aquellos naturales tales que sus divisores positivos pueden repartirse en dos grupos disjuntos con idéntica suma). La escritura de programas de ordenador utilizando un lenguaje de programación próximo a la notación matemática (como por ejemplo Haskell) constituye el primer paso a la solución del problema, ya que es posible escribir con poco esfuerzo sencillos y elegantes programas tan próximos a la descripción del problema que su corrección es inmediata. Por ello, la escritura de estos programas permite realizar un análisis rápido del problema. Sin embargo tales programas pueden ser casi inútiles si son extraordinariamente ineficientes. A veces, un estudio previo siguiendo pautas de la $\mathcal{M}at\mathcal{R}ec$ conduce a propiedades de fácil comprobación computacional, y que *casi* caracterizan a las soluciones; tales propiedades permiten escribir programas muy eficientes.

Palabras clave: Programación recreativa, matemática recreativa, lenguajes funcionales, Haskell.

---

[a]Este trabajo ha sido presentado en la sección *TICEMUS* de *TIME 2010: Technology and its Integration into Mathematics Education*, Málaga, 6-10 de Julio de 2010. Ha sido sufragado en parte por los Proyectos de Investigación nacionales ReSCUE TIN2008-05932 y P07-TIC03131.

[†]Departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación. Universidad de Málaga.

[‡]IES Fuente Lucena. Alhaurín el Grande (Málaga).

0. ¿Qué problemas forman parte de la $\mathcal{P}ro\mathcal{R}ec/\mathcal{M}at\mathcal{R}ec$?

En esta sección pretendemos hacer un análisis personal sobre el papel de estas disciplinas. Pedimos perdón al lector si le resulta extenso, pero creemos que es necesario ya que, al ser la temática algo confusa, aclarará nuestras ideas.

Existen una cantidad importante de problemas que comparten las disciplinas $\mathcal{P}ro\mathcal{R}ec$ y $\mathcal{M}at\mathcal{R}ec$. Nos interesan particularmente aquellos que, además de motivar el estudio de estas disciplinas, pueden provocar un estudio más serio que en algunos casos conduce a una revisión de ciertos problemas aún no resueltos.

Richard Guy, en el prólogo a la primera edición de su célebre *Unsolved Problems in Number Theory* [10] dice:

> Proponer buenos problemas aún no resueltos es un arte difícil. El balance entre trivial y no-resuelto es delicado.

El matemático húngaro Pál Erdös aportó una gran cantidad de *buenos* problemas no resueltos, para los cuales ofrecía una recompensa entre \$1,00 y \$1,000,00 dependiendo de una estimación del tiempo y la dificultad que supondrían la resolución.

Un programador *serio* puede sospechar que algunos *juegos*[1] matemáticos pueden conducir a problemas no resueltos si se vislumbra que tienen alguna relación con una buena fuente de problemas no resueltos, cuyos ejemplares más sencillos nos lo proporciona la Teoría de Números.

¿Por qué juega un papel primordial la Teoría de Números? Albert [1] afirma que a Leonard Dickson[2] le gustaba decir:

> La matemática es la reina de las ciencias, y la teoría de números es la reina de las matemáticas.

No está claro ni el origen de tal frase ni la forma original. En la página 118 de la *autojustificación* de Harold Hardy [11] podemos leer otra versión:

> Algunas veces se ha sugerido que la auténtica grandiosidad de los matemáticos reside en la inutilidad de su obra [...] Tal tesis acostumbra ser fundamentada sobre una imprudente afirmación atribuida a Gauss, según la cual, si las matemáticas son la reina de las ciencias, la teoría de números es, a causa de su suprema inutilidad, la reina de las matemáticas (nunca he conseguido detectar una cita rigurosa). Estoy seguro que la afirmación de Gauss (en caso de que fuera suya) ha sido erróneamente interpretada [...]

[1] El término *Programación Recreativa* no suele ser utilizado – ¡no está acuñado! – aunque sí el término cercano *Juegos de Ordenador* o *Computer Recreations* popularizado por Alexander Dewdney en la famosa sección que con ese título escribiría durante los años 80 en *Scientific American*. Esta sección sustituiría a la no menos célebre sección que en la misma revista escribiría durante 25 años Martin Gardner con el título *Mathematical Games*.

[2] Leonard Eugene Dickson (1874—1954) fue uno de los matemáticos más prolíficos; con 30 años ya había escrito 100 artículos relevantes; su producción científica consta de 285 publicaciones, 18 de las cuales son libros, entre los que aparecen su monumental historia [9], o su *Modern Elementary Theory of Numbers* (University Chicago Press (1939).)

Son muy interesantes aquellos libros o publicaciones sobre algoritmos o cualquier otra rama de la ciencia que contienen en su bibliografía una cantidad importante de trabajos sobre teoría de números. Cabe citar por ejemplo [4], donde entre sus 335 referencias, 40 de ellas son sobre Teoría de Números, y muchas sobre $\mathcal{M}at\mathcal{R}ec$: Ball (1967), Berlekamp–Conway–Guy (Winning Ways, 1982); juegos matemáticos: Martin Gardner (1959–1979), juegos de ordenador: (Alexander Dewdney, 1984). Si nos atrevemos a realizar un análisis parecido del texto [14] nos sorprenderemos aún más.

Un profesor responsable debe prestar especial atención a qué se entiende por problema serio. La respuesta también es delicada; nos ayudaremos de unas frases de Harold Hardy extraídas de la página 104 de la *autojustificación* [11]:

> Tomaremos unos pocos ejemplos de curiosidades aisladas en las que abunda la aritmética. Consideremos dos, prácticamente escogidos al azar, de las *Mathematical Recreations*[3] de Rouse Ball.
>
> a) 8712 y 9801 son los únicos números de cuatro cifras que son múltiplos enteros de sus "inversos": $8712 = 4 \cdot 2178$ y $9801 = 9 \cdot 1089$ y no ha ningún otro número anterior al 10,000 que posea esta propiedad.
>
> b) Tan sólo hay cuatro números mayores que 1 que puedan expresarse como la suma de los cubos de tres dígitos: $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$ [...]
>
> Los que acabamos de exponer son hechos singulares, muy adecuados para secciones de pasatiempos y para divertir a los aficionados a tales temas, pero *nada hay en ellos que parezca tener referencia alguna con las auténticas matemáticas* [...]

El enfatizado último es nuestro y quizás sorprenda a muchos: ¿No podemos encontrar un análisis de estos problemas realmente interesante? ¿Ni siquiera permitiendo un número de dígitos arbitrario? La dureza de las palabras de Hardy causan perplejidad a todos aquellos que hemos dedicado muchas horas a estos problemas de aritmética o de teoría de números, tanto desde un punto de vista educacional como puramente lúdico. Desde luego algo de razón tiene Hardy, pero no podemos dársela toda: Lo importante es la *productividad matemática* fruto de la investigación con los métodos empleados, sean estos rudimentarios o más sofisticados. Que los métodos empleados sean rudimentarios, como la aritmética elemental, no debe afectar a la calidad de la solución. Esto ocurre con muchos trabajos. Por ejemplo, entre las numerosas contribuciones de Dickson aparecen estudios sobre números perfectos impares [7] y sobre abundantes pares [8], o su último artículo, escrito a la edad de 65 años: *All integer excepts 23 and 239 are sums of eight cubes*[4].

El objetivo de la $\mathcal{P}ro\mathcal{R}ec$ es escribir buenos programas, entendiendo por ello, programas correctos y eficientes; al menos tan eficientes como alcance el conocimiento que se tenga del problema en sí. Siguiendo la opinión de Hardy, la selección del problema a tratar es esencial.

[3] 11ª edición, 1939 (revisada por H.S.M. Coxeter)
[4] Bull. Amer. Math. Soc., vol 45, pp. 588-591 (1939)

Ilustremos el papel de la $\mathcal{P}ro\mathcal{R}ec$ a través de un curioso (y pensamos que original) problema:

> El presidente de la república de Zumkia durante su larga vida ha logrado obtener una *hermosa* colección formada por un ejemplar de cada uno de los billetes de sus país; la colección asciende a un total de la nada despreciable cantidad de 1,249,920 zumkios. El zumkio, la moneda de Zumkia, solo está disponible en billetes de un zumkio y cada uno de los múltiplos de 3, 5 o 7 zumkios. Existe pues el billete de 15 zumkios, pero no el de 10. ¿Cuántos billetes tiene la colección? ¿Cómo podrá repartirla entre sus dos hijos a partes iguales? ¿Alguno de los posibles repartos tiene, además del mismo valor, el mismo número de billetes?

¿Es interesante este problema? Podemos dar una rápida respuesta si vemos su relación con algunos problemas *serios* aún no resueltos y cercanos, como la ausencia de números perfectos impares, o la finitud del conjunto de perfectos pares.

Recordemos que un número n es *perfecto* si es la suma de sus factores propios, es decir, de sus divisores positivos, excluido n. Si denotamos con ∂n el conjunto de los factores de n, entonces $\partial 6 = \{1, 2, 3, 6\}$, y $6 = 1+2+3$ es perfecto. Será también útil denotar con ΣA la suma de los elementos del conjunto A. Entonces n es perfecto sii $\sigma\, n = 2n$, donde $\sigma\, n \equiv \Sigma(\partial n)$. Un número es de Zumkeller si el conjunto de sus factores (divisores positivos) admite una partición en dos conjuntos con igual suma. Estos números generalizan a los números perfectos. Así, el número 12 no es perfecto, pero $\partial 12 = \{1, 3, 4, 6\} \cup \{12, 2\}$, de tal suerte que $\Sigma\{1, 3, 4, 6\} = \Sigma\{12, 2\}$, y por tanto 12 es un número de Zumkeller. Los primeros números de Zumkeller son:

$$6, 12, 20, 24, 28, 30, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 78, 80, 84, 88, 90, \ldots$$

Si ζ es el valor (en zumkios) del mayor billete de la colección del presidente de Zumkia, el problema de reparto tendrá solución si ζ es un número de Zumkeller. Ahora bien, si existe el billete de m zumkios, m debe ser de la forma $3^i 5^j 7^k$; debemos encontrar pues un billete ζ tal que la suma de sus divisores sea 1,249,920: $\sigma(\zeta) = 1,249,920$. A partir de este dato debemos comprobar si es posible repartir los billetes en dos partes con igual suma.

Según el Teorema Fundamental de la Aritmética [12](p.3), todo natural admite una única descomposición en factores primos: $n = p_1^{k_1} \ldots p_j^{k_j} (k_i > 0, p_i$ primos distintos, $p_1 < p_2 < \ldots)$. Conocida esta descomposición es posible obtener la suma de los factores de n como producto de sumas de progresiones geométricas en la forma:

$$\sigma\, n = (1 + \cdots + p_1^{k_1}) \ldots (1 + \cdots + p_j^{k_j}) = \Pi_{1 \leq i \leq j} \frac{(p_i^{k_i+1} - 1)}{(p_i - 1)} \tag{1}$$

ya que cada factor de n aparece exactamente una sola vez en el desarrollo en productos del miembro de la derecha.

Calculemos pues i, j, k de forma que $\sigma(3^i 5^j 7^k) = 1,249,920 = 2^7 3^2 5^1 7^1 31^1$. Si utilizamos (1) y algunos razonamientos sencillos (por ejemplo, $7 \nmid 7^{k+1} - 1$, y de aquí $k = 1, \ldots$) llegamos a $i = 3, j = 5, k = 1$. En consecuencia, el número ζ es $3^3 5^5 7$. Además el número de sus factores es $(3+1)(5+1)(1+1) = 48$, que será el número de billetes de la colección. El número de posibles repartos es $2^{48}/2 = 140,737,488,355,328$, y el número de repartos con igual número de billetes será $\binom{48}{24}/2 = 16,123,801,841,550$. En definitiva, abordar el problema estudiando todos los posibles repartos es inviable.

Volvamos a la relación con los números perfectos. ¿Es más difícil caracterizar los números perfectos que los de Zumkeller? Pensamos que sí, y en este trabajo daremos algunas muestras.

Comprobemos directamente vía la fórmula (1) que el número $e = 2^k(2^{k+1} - 1)$ es perfecto si $2^{k+1} - 1$ es primo. La suma de factores de e es $(1 + \cdots + 2^k)2^{k+1} = (2^{k+1} - 1)2^{k+1} = 2e$, y e es perfecto; este sorprendente resultado fue ya descrito por Euclides en la Proposición 36 del libro IX de Elementos [13] (página 67), y muchos siglos más tarde, Euler probó que los números perfectos pares son de esa forma $2^k(2^{k+1} - 1)$, siendo $2^{k+1} - 1$ un número primo[5]. Entre los números de la forma $2^{k+1} - 1$ no todos son primos: $2^{12} - 1 = 4095$. Es bien conocido que si $a^k - 1$ es primo, entonces $a = 2$ y k es primo [12](Th.18, p.15). Euler también prueba que todo perfecto impar se escribe en la forma $n = \overline{\omega}^\gamma m^2$, donde $\overline{\omega} \equiv \gamma (\bmod 4)$.

Todavía se desconoce la existencia de números perfectos impares, resultando ser éste uno de los problemas de la teoría de números más célebre aún no resuelto[6]. Nos debemos contentar con una cantidad asombrosa de requisitos que debe cumplir un número perfecto impar (véase un repertorio de éstas en [20, 10]). A Martin Gardner se le atribuye la célebre frase:

> Es difícil encontrar un conjunto de números con una historia más fascinante y propiedades tan elegantes y rodeados de misterio - y a la vez completamente inútiles - como los números perfectos.

Seguramente Harold Hardy, y muchos matemáticos, no compartirían de la frase anterior el adjetivo "completamente inútiles"[7].

Denotemos con $\mathcal{Z}$ el conjunto de los números de Zumkeller. Expondremos en este trabajo un algoritmo extraordinariamente rápido para comprobar cuándo $n \in \mathcal{Z}$ si es conocida la factorización de n (recordemos que el cómputo de $\sigma\, n$ es equivalente a la factorización de n [2]). Para la descripción y ejecución del algoritmo hemos

[5] El lector puede encontrar recopiladas en [19] hasta 6 demostraciones distintas de este resultado, desde la original de Euler, hasta la más elegante y simple de Dickson de 1911.

[6] The existence or otherwise of odd perfect numbers in one of the more notorious unsolved problems of number theory [10](p.44).

[7] Recomendamos al lector la lectura de las secciones §22 y §26 de la *autojustificación* [11].

elegido como lenguaje de programación HASKELL[8], un lenguaje funcional moderno ampliamente utilizado tanto en el mundo académico como el profesional [17].

Por tanto el problema de la comprobación de $n \in \mathcal{Z}$ queda prácticamente resuelto desde un punto de vista computacional si somos capaces de calcular la factorización en un tiempo prudencial, y éste es realmente el problema. En este punto interesa recordar a Gauss, que distingue claramente el problema de la primalidad del de la factorización. Así escribe en 1801 en sus *Disquisitiones Arithmeticæ* (Art.329) (ref. [14]-pág.398, [16]):

> El problema de distinguir los números primos de los compuestos y su factorización es uno de los problemas más importantes y útiles en la aritmética ... Sin embargo, debemos confesar que todos los métodos que se han propuesto hasta el momento son muy especiales o laboriosos incluso para números pequeños ... La dignidad de la ciencia requiere toda la ayuda para explorar la solución de un problema tan elegante y célebre.

Los test sobre primalidad y factorización más utilizados se fundamentan en métodos desarrollados recientemente a partir de resultados de Lucas y Lehmer [14](pág. 391) (véase el interesante estudio [16] y las ¡34 páginas! de la sección §4.5.4 del célebre volumen de Knuth [14]). Entre otros algoritmos eficientes utilizados para la primalidad y la factorización debemos citar el algoritmo ρ de John Pollard y los de la familia AKS (Agrawal, Kayal & Saxena) que resultan tener tiempo acotado en forma polinómica, aunque, debido al factor de proporcionalidad, no se ha demostrado que éstos sean prácticos desde un punto de vista computacional, de forma que se considera que el problema citado por Gauss todavía no está resuelto.

Reducido el problema $n \in \mathcal{Z}$ a un mero cómputo debemos investigar aquellas propiedades del conjunto $\mathcal{Z}$ que conducen, bien a resultados teóricos *serios*, o bien a mejorar la eficiencia de los programas de ordenador. Aquí es donde entra en acción la relación entre la *verdadera* matemática, y *la matemática experimental*. Queremos aquí recordar la frase de Vladímir I. Arnold (1937–2010), el célebre discípulo de Kolmogórov, que decía[9]:

> Las matemáticas son una parte de la física. La física es una ciencia experimental, parte de las ciencias naturales. Las matemáticas son la parte de la física en la que los experimentos son más baratos.

La interacción entre la calidad y corrección de los programas funcionales escritos con los modernos lenguajes disponibles actualmente, y los *teoremas* de la matemática encontramos lo que realmente considera Arnold: Una investigación matemática experimental barata.

---

[8] `http://www.haskell.org`

[9] Esta frase, de la cual no hemos encontrado la cita original, aparece en el obituario escrito por Manuel de León: *Vladímir I. Arnold, el matemático que amaba los problemas.* EL País, viernes 11 de Junio de 2010.

Así, la lentitud de los primeros programas que escribimos condujo al estudio de propiedades que aceleren el proceso. Una propiedad, precisamente la más fácil de demostrar, es la que aportará el mayor grado de eficiencia: Si $z \in \mathcal{Z}$ entonces $\sigma\, n \geq 2n$; es decir, todo número de Zumkeller no perfecto debe ser 2-abundante.

Todo número perfecto es un número de Zumkeller. Estos números son llamados números de Zumkeller en honor al matemático que publicó algunos resultados y conjeturas sobre estos números en 2003.

Existen muchísimos trabajos sobre números perfectos, generalizaciones y variantes (perfectos-múltiples, abundantes, semiperfectos, amigos, prácticos, etc.) [10]. Por ello es muy difícil aportar ideas, resultados originales, problemas no resueltos, o incluso, podemos desconocer la originalidad de alguna idea, por muy peregrina que resulte (véase una buena colección de referencias en [19]).

Recientemente, K. Bhaskara junto a Y. Peng han publicado un artículo [3] que relaciona algunos de estos números, y sintetiza las propiedades más conocidas de los números de Zumkeller. Salvo este trabajo no conocemos otro actual que contenga resultados nuevos.

En el presente artículo revisamos también las propiedades de los números de Zumkeller a través de un método original basado en combinaciones unitarias de divisores de un número [15].

1. Análisis de la forma y distribución de los números de Zumkeller

Esta sección está dedicada a un análisis elemental de los números de Zumkeller para obtener aquellas propiedades que los caracterizan desde un punto de vista computacional: Aquellas que permiten decidir de forma eficaz cuando $n \in \mathcal{Z}$.

1.1. Propiedades elementales y conjeturas sobre la distribución de los números de Zumkeller

El conjunto de números perfectos es muy pequeño, mientras que $\mathcal{Z}$ resulta infinito, con densidad $\simeq 0.229$. Ya que 6 es perfecto (1+2+3=6), encontramos $\Sigma\{1, 2, 3, p, 2p, 3p\} = \Sigma\{6, 6p\}$. Y si p es primo > 3, entonces en la partición anterior aparecen todos los factores de $6p$, de donde $6p \in \mathcal{Z}$. Ahora basta aplicar que el conjunto de primos en infinito para deducir que también lo es $\mathcal{Z}$.

En esta sección estudiaremos propiedades necesarias para la pertenencia a $\mathcal{Z}$, que siendo muy restrictivas no son condiciones suficientes. Si $\sigma\, n$ representa la suma de los factores de n, entonces n es perfecto sii $2n = \sigma\, n$. Conocidos los factores, la suma de éstos se puede obtener en forma analítica y es fácil comprobar si un número es perfecto a partir de sus factores. Sin embargo, incluso conociendo los factores, no se conocen métodos sencillos para comprobar si un número n es de

N	sat. $2 \mid \sigma n$	sat. $\sigma n \geq 2n$	sat. $\heartsuit$	total en $\mathcal{Z}$	%
1,000	947	249	229	224	97.8
10,000	9,830	2,492	2,420	2,294	94.8
100,000	99,461	24,799	24,570	23,051	93.8
1,000,000	998,293	247,549	246,816	229,026	92.8
10,000,000	9,994,602	2,476,741	2,474,422	2,287,889	92.5
20,000,000	19,992,366	4,953,988	4,950,715	4,577,210	92.5

Tab. 1: Frecuencias de naturales $n \leq N$ satisfaciendo $2 \mid \sigma n \wedge \sigma n \geq 2n$.

Zumkeller, aunque tal como después expondremos, hemos encontrado un algoritmo extraordinariamente rápido.

Si $n \in \mathcal{Z}$, entonces existe una partición $D \uplus D' = \partial n$ del conjunto de factores ∂n de forma que $\Sigma D = \Sigma D'$; de aquí $2(\Sigma D) = \sigma n$: La suma de factores de n es par. Por otro lado, ya que n aparece en D o en D', entonces $\Sigma D \geq n$, y por tanto $\sigma n \geq 2n$. En definitiva:

$$\text{Si } n \in \mathcal{Z}, \text{ entonces } 2 \mid \sigma n \wedge \sigma n \geq 2n. \tag{2}$$

Estas condiciones son de comprobación inmediata a partir de (1) y de la descomposición en factores primos. Además: Si la suma de divisores σn es par, alguna de las sumas de progresiones de la ecuación (1) debe ser par. Pero $1+\cdots+2^k$ siempre es impar, luego alguna de las restantes sumas debe ser par. Sea $s = 1+\cdots+p^k$ una de ellas, con p primo impar. Ya que cada sumando de s es impar, el número de términos debe ser par, y por tanto k debe ser impar. En definitiva: *En la descomposición en factores primos de un número cuya suma de factores es par debe figurar al menos un primo impar con exponente impar*. Por tanto, ni 3^2, ni $2^3 3^2 5^2$, ni $2^i(2k+1)^{2j}$ son de Zumkeller.

Según (2) cada número n de $\mathcal{Z}$ satisface las propiedades:

$$2 \mid \sigma n \wedge \sigma n \geq 2n \tag{$\heartsuit$}$$

o equivalentemente:

$$\sigma n = 2(n+i), \text{ con } i \geq 0 \tag{$\heartsuit$}$$

¿Entre los que satisfacen $\heartsuit$ cuáles son los de Zumkeller? De momento contestaremos a la pregunta ¿entre los que satisfacen $\heartsuit$ cuántos son de Zumkeller? Estimamos que una buena proporción, de forma que $\heartsuit$ es extraordinariamente restrictiva. Con eficientes programas que describiremos en una sección posterior, podemos obtener la Tabla 1. En la última columna de ésta aparece la proporción de números del intervalo $[1..N]$ que satisfaciendo $\heartsuit$ son de Zumkeller. Por ejemplo, entre los 20 millones primeros de naturales aproximadamente el 24.7 % de ellos (exactamente 4,950,715) satisfacen $\heartsuit$, y entre éstos, el 92.5 % son de Zumkeller. Por tanto solamente una pequeña porción de entre los que cumplen $\heartsuit$ no son de Zumkeller y desde un punto de vista computacional la restricción $\heartsuit$ es esencial. También vemos que la frecuencias de números de Zumkeller parece que se estabiliza alrededor de un 22.9 %.

De la tabla deducimos también que la condición $2 \mid \sigma\, n$ es poco restrictiva ya que la satisfacen casi todos: ¡ El 99.96 % de entre los 20 primeros millones de naturales !

Por el contrario, la condición $\sigma\, n \geq 2n$ filtra casi la 4ª parte. Wall et a. [10](pág.46) muestran que la densidad de los números abundantes (aquellos que satisfacen $\sigma\, n > 2n$) está comprendida entre 0.24750 y 0.24893. Paul Erdös conjetura que esta densidad es irracional. Conjeturamos que la densidad de $\mathcal{Z}$ es aproximadamente 0.229.

Hemos comprobado las siguientes conjeturas para todos los naturales menores que 50,000,000:

Conjetura 1.1: Si z_n es la secuencia ordenada de números de Zumkeller, entonces: $z_{n+1} - z_n \leq 12 \wedge z_{n+1} - z_n \neq 11$.

De esta conjetura encontramos: Para todo $K > 0$, en el intervalo $[K, K+11]$ hay al menos un número de $\mathcal{Z}$.

Conjetura 1.2: Si n es impar y satisface $\heartsuit$ entonces $n \in \mathcal{Z}$.

La Conjetura 1.2 es curiosa, pero poco útil si queremos utilizarla para estimar la densidad de $\mathcal{Z}$. En efecto, según la Tabla 1, casi un 24.7 % del primer millón de naturales satisfacen $\heartsuit$, y de éstos solamente 1,989 son impares (i.e., el 0.2 %), y por supuesto de Zumkeller.

Conjetura 1.3: Si $\sigma\, n = 2(n+i)$ con $i < 8$ entonces $n \in \mathcal{Z}$.

La Conjetura 1.3 es igualmente curiosa y poco útil para el mismo propósito: Solo un 1.53 % de los números menores que 1,000,000 satisfacen la ecuación $\sigma\, n = 2(n+i)$ con $0 \leq i \leq 7$, frente al 22.9 % que representan los números de Zumkeller del mismo intervalo.

1.2. Análisis à la Carmichael–Dickson

Vimos que la condición $\sigma\, n \geq 2n$ para la pertenencia $n \in \mathcal{Z}$ es muy restrictiva. Para analizarla usaremos la función abundancia de Sylvester [18], $h\, n \;= (\sigma\, n)/n$, y estudiemos $h\, n \;\geq 2$ al igual que hacen Carmichael [5] para el estudio de los perfectos-múltiples ($\sigma\, n = kn$, k natural), y Dickson [7] para estudiar los números abundantes con un número limitado de primos en su representación.

Si conocemos la descomposición en factores primos de n podremos comprobar fácilmente esta desigualdad, ya que por la ecuación (1) tenemos:

$$h(p_1^{k_1} \ldots p_j^{k_j}) = h(p_1^{k_1}) \ldots h(p_j^{k_j}) < \Pi_{1 \leq i \leq j} \frac{p_i}{p_i - 1}$$

El valor $h(p^k)$ crece con k, pero es decreciente en p. Por tanto, $h(p^k) < 2$ y ninguna potencia de un primo es 2-abundante, ni tampoco de Zumkeller, ni tampoco perfecto. Además se verifican:

1. $h(qm) \geq h(q)h(m)$
2. Si $m \mid n$ entonces $h\,n \geq h\,m$.
3. Si $\operatorname{mcd}(q,m) = 1$ entonces $h(qm) = h(q)h(m)$.

De estas propiedades podemos concluir fácilmente:

— Para $k, i \geq 1, h(2^k 3^i) \geq h(2)h(3) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$.

— Para $k \geq 2, i \geq 1, h(2^k 5^i) \geq \frac{7}{4} \cdot \frac{6}{5} > 2$,

y vemos que el conjunto de números 2-abundantes pares es extenso. Estudiemos ahora los impares. Empezamos por los impares con dos factores primos p_1 y p_2 satisfaciendo $3 \leq p_1 < p_2$. Por ser $h(p^k)$ decreciente en p, $h(p_1^{k_1} p_2^{k_2}) \leq h(3^{k_1} 5^{k_2}) < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} < 2$. En definitiva, *todo número 2-abundante impar tiene al menos tres factores primos distintos.* Razonamos en forma similar para seis primos distintos $p_1 < \ldots < p_6$. Si se diera $3 < p_1$, entonces:

$$h(p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} p_4^{k_4} p_5^{k_5} p_6^{k_6}) < \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} < 2.$$

Por tanto, si n es 2-abundante impar con $\omega(n) \leq 6$, entonces $3 \mid n$. Siguiendo este método obtenemos que los posibles impares 2-abundantes con $\omega(n) \leq 6$ son:

- $3^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} p_4^{k_4} p_5^{k_5} p_6^{k_6}$, siendo $p_2 \in \{5, 7, 11\}$,
- $3^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} p_4^{k_4}$, siendo $p_2 \in \{5, 7\}$.
- $3^{k_1} 5^{k_2} p_3^{k_3}$, siendo $p_3 \in \{7, 11, 13\}$.

Casi todos estos son números de Zumkeller; fallan, entre otros, aquellos con suma de divisores impar (con exponentes todos pares) que resultan ser son muy pocos (véase un estudio en [15]).

1.3. Combinaciones unitarias de divisores y generadores.

El número 12 es de Zumkeller ya que los factores de 12 se descomponen en dos sumas iguales: $1 + 3 + 4 + 6 = 2 + 12$, y por tanto $1 - 2 + 3 + 4 + 6 - 12 = 0$. Es decir, es posible obtener el número 0 combinando los factores de 12 con coeficientes $\pm$. Llamaremos a estas **combinaciones unitarias**. Por tanto un número es de Zumkeller sii el 0 se puede representar como combinación unitaria de sus factores. Esta propiedad tan simple conduce a un análisis muy rápido. Por ejemplo, si p^k fuera de Zumkeller, alguna combinación unitaria de las potencias $1, \ldots, p^k$ es nula; es decir, es posible elegir un signo de entre $\pm$ de forma que se satisfaga la ecuación

$$1 \pm p \pm p^2 \pm \ldots \pm p^k = 0$$

Si se diera tal combinación el número 1 sería combinación de múltiplos de p, por tanto es a su vez múltiplo de p; en definitiva tal combinación no existe. Es decir, la potencia p^k de un primo no es de Zumkeller.

Estudiemos ahora las combinaciones unitarias correspondientes a $p^k m$, donde p es primo y primo con m. En ese caso cada divisor de $p^k m$ es producto de un divisor de m por una potencia de p, de forma que el conjunto de factores de $p^k m$ se puede descomponer en conjuntos disjuntos:

$$\partial(p^k m) = D \uplus pD \uplus p^2 D \uplus \cdots \uplus p^k D, \text{siendo } D = \partial m \tag{3}$$

donde $xA \equiv \{xa \mid a \in A\}$ y $\uplus$ representa la unión disjunta. Veamos que a partir de (3) podemos obtener el conjunto de combinaciones unitarias de los divisores de $p^k m$ mezclando adecuadamente las combinaciones unitarias de los divisores de m.

$$\mathcal{C}(p^k m) = M \pm pM \pm p^2 M \pm \ldots \pm p^k M, \text{ siendo } M = \mathcal{C}m \tag{4}$$

donde $\mathcal{C}n$ es una expresión simplificada de $\mathcal{C}(\partial n)$.

Si A es un conjunto de enteros, denotemos con $\mathcal{C}A$ el conjunto de sus combinaciones unitarias. Para uniones disjuntas se verifica $\mathcal{C}(A \uplus B) = \mathcal{C}A \pm \mathcal{C}B$, donde:

$$X \pm Y = \{x + y, x - y, -x + y, -x - y \mid x \in X, y \in Y\}$$

Este operador $\pm$ es conmutativo y asociativo; además satisface $\mathcal{C}(pA) = p\mathcal{C}A$. Aplicando estas propiedades a (3) podemos escribir:

Veamos como aplicar (4) para generar nuevos números de Zumkeller a partir de otros conocidos. Es obvio que si $0 \in A$, entonces $0 \in p^k A$, y de aquí $0 \in A \pm pA \pm \ldots \pm p^k A$; ahora aplicamos (4): Si $0 \in \mathcal{C}m$, tendremos que $0 \in \mathcal{C}(p^k m)$. En definitiva:

$$\text{Si } m \in \mathcal{Z}, \text{ con } \operatorname{mcd}(p, m) = 1, \text{ entonces } p^k m \in Z. \tag{5}$$

Sean ahora n y m dos números primos entre sí, siendo $n = p_1^{k_1} \ldots p_j^{k_j}$ la descomposición en factores primos de n. Si $m \in \mathcal{Z}$, aplicando (5) obtenemos $p_1^{k_1} m \in \mathcal{Z}$, y multiplicando sucesivamente por el resto de potencias de primos tendremos que también $nm \in \mathcal{Z}$. Obtenemos pues una generalización:

$$\text{Si } m \in \mathcal{Z}, \text{ con } \operatorname{mcd}(n, m) = 1, \text{ entonces } nm \in \mathcal{Z}. \tag{5}$$

Además, $3 \notin \mathcal{Z}$ pero $2 \cdot 3 \in Z$, y falla la implicación recíproca de (5).

Veamos otra aplicación de (4). Si en esta ecuación tomamos $k+k+1$ en lugar de k, obtendremos $\mathcal{C}(p^{k+k+1} m) = \mathcal{C}(p^k m) \pm p^{k+1} \mathcal{C}(p^k m)$, siendo $M = \mathcal{C}m$. Aplicando reiteradamente este razonamiento obtenemos:

$$\mathcal{C}(p^{k+s(k+1)} m) = \mathcal{C}(p^k m) \pm \ldots \pm p^{s(k+1)} \mathcal{C}(p^k m) \tag{6}$$

Por tanto, si $p^k m \in \mathcal{Z}$ con $(p, m) = 1$, entonces $p^{k+s(k+1)} m \in \mathcal{Z}$. Y en definitiva, a partir de la descomposición $p_1^{k_1} \ldots p_j^{k_j}$ en factores primos de un número de Zumkeller

se obtienen una colección muy amplia de números de Zumkeller, que se llaman trasladados: $p_1^{k_1+s_1(k_1+1)} \dots p_j^{k_j+s_j(k_j+1)}$. En resumen:

$$\text{Si } p_1^{k_1} \dots p_j^{k_j} \in \mathcal{Z} \text{ entonces } p_1^{k_1+s_1(k_1+1)} \dots p_j^{k_j+s_j(k_j+1)} \in \mathcal{Z}. \tag{7}$$

Las ecuaciones (5) y (7) conforman el único método general conocido para generar nuevos números de Zumkeller. Así, un número de Zumkeller lo llamaremos generador si ni es de la forma qm, con $\operatorname{mcd}(q,m) = 1$ y $n \in \mathcal{Z}$, ni se obtiene por traslación de un número de Zumkeller menor[10].

Los generadores producen todos los números de Zumkeller al trasladarlos o al multiplicarlos por un número primo con él. La secuencia de números generadores es:

$$6, 12, 20, 28, 40, 48, 56, 70, 80, 88, 90, 104, 112, 126, 176, 192, 198, 208, \dots$$

Podemos escribir un sencillo programa Haskell para obtener la secuencia de generadores de $\mathcal{Z}$ a través de un método similar a la **criba de Eratóstenes** (más detalles pueden verse en [15]): Se toman inicialmente como candidatos la secuencia ordenada de números más aproximada; por ejemplo, la que satisface $2|(\sigma\, n) \wedge \sigma\, n \geq 2n$. Se toma el primer Zumkeller de esta secuencia; esto es, el 6; se tachan todos sus trasladados y los múltiplos $6m$ con $\operatorname{mcd}(m,6) = 1$; es decir, los números $24, 30, 42, \dots$ El primer Zumkeller no tachado es el siguiente generador. Este es el 12. Ahora eliminamos de nuevo los trasladados del 12 y los múltiplos $12m$ con $\operatorname{mcd}(m,12) = 1$. Este proceso se itera hasta obtener la secuencia deseada. Este proceso puede escribirse en Haskell en forma elemental ya que la evaluación perezosa simplifica el diseño y permite escribir la función que computa la lista infinita de los generadores de Zumkeller ¡En pocos minutos podemos obtener los 7,438 generadores de $\mathcal{Z}$ menores de 1,000,000! De este cómputo obtenemos la siguiente:

Conjetura 1.4: El número de generadores de Zumkeller menores que K es del orden de $0.5 \cdot K^{0.69}$.

Solución al problema de reparto del presidente de Zumkia

El mayor billete de la colección del presidente de Zumkia es $\zeta = 3^3 5^5 7$, un trasladado del número de Zumkeller $3^3 5^1 7$, y por tanto también es de Zumkeller, y el problema de reparto tiene solución. ¿Existe algún reparto con el mismo número de billetes? Puesto que el original $\zeta = 3^3 5^5 7$ tiene demasiados divisores, incluso un programa eficiente que compruebe los posibles repartos es muy lento. Podemos aplicar la ecuación (6), donde observamos que si $3^3 5^k 7$ es de Zumkeller, lo son los trasladados $3^3 5^{k+s(k+1)} 7$, y además, si existe una combinación de divisores de $3^3 5^k 7$ con igual número de positivos que de negativos, entonces, la fórmula proporciona también una combinación del mismo tipo pero para $3^3 5^{k+s(k+1)} 7$. Veamos: $3^3 5^5 7$ es trasladado de $3^3 5^2 7$ y de $3^3 5^1 7$. El número de divisores de estos no es demasiado

[10] No es fácil generalizar un concepto de Zumkeller primitivo similar al utilizado en [7].

elevado y un programa que compute todas las particiones con igual suma e igual número de divisores va bien. La ejecución del programa para el número $3^3 5^1 7$ demuestra que no existe ninguna partición con igual suma e igual número de divisores. Pero para $3^3 5^2 7$ existe exactamente una:

$$\begin{aligned}&\Sigma\{1,3,5,7,9,15,25,27,35,45,63,3^3 5^2 7\}\\&=\Sigma\{21,75,105,135,175,189,225,315,525,675,945,1575\}\end{aligned}$$

Como $3^3 5^5 7 = 5^3 \cdot 3^3 5^2 7$, la fórmula (4) permite encontrar una partición de estas características sin más que añadir a cada miembro de la anterior los mismos multiplicados por 5^3, y obtenemos la forma de repartir los billetes de la colección en dos partes con la misma suma y el mismo número de billetes:

$$\begin{aligned}\Sigma\{\ &1,3,5,7,9,15,25,27,35,45,63,3^3 5^2 7,\\&125,375,625,875,1125,1875,3125,3375,4375,5625,7875,590625\}=\\\Sigma\{\ &21,75,105,135,175,189,225,315,525,675,945,1575,\\&2625,9375,13125,16875,21875,23625,28125,39375,65625,84375,118125,196875\}\end{aligned}$$

2. Un test voraz para el estudio de los números de Zumkeller

Los algoritmos más sencillos para la localización de números de Zumkeller son aquellos que escudriñan en forma combinatoria todas las posibles particiones de los divisores. Pero éstos son ineficaces, e incluso llegan a ser inútiles para números no muy grandes. Son mejores aquellos basados en cocientes reiterados [15] o la criba antes descrita; estos también son ineficientes para $n > 100,000$ ¿Es posible encontrar un algoritmo eficaz al menos para una gran cantidad de números? Estudiamos en esta sección un curioso algoritmo que comprueba en forma *casi* directa si un número es de Zumkeller. Usaremos de nuevo el lenguaje de programación Haskell.

Consideremos la función *admitePartición* de la Figura 1; la llamada a esta función a través de la expresión *admitePartición ds s s′* devuelve *True* si la lista *ds* descendente de naturales admite una partición en dos sublistas cuyos elementos sumen los números naturales s y s'. Supondremos pues que $s + s'$ coincide con la suma de los valores de la lista primer argumento y que $s, s' \geq 0$. Este programa es extraordinariamente rápido si es conocida la factorización del número en cuestión (recordemos que el cómputo de $\sigma\, n$ es equivalente a la factorización de n [2]). La razón de ello es que nuestro programa es "casi" voraz. Para ilustrarlo consideremos el siguiente análisis.

La función *admitePartición* va asignando sucesivamente los divisores de la lista decreciente primer argumento a cada una de las particiones, de las cuales solamente conoce la suma de los factores que les falta. En primer lugar observamos el funcionamiento del operador || en la última ecuación de *admitePartición*: Se realizará la búsqueda en forma prioritaria asignando el divisor mayor d pendiente a la segunda partición (la correspondiente a la segunda suma). Pero si este factor no es posible asignarlo a esta partición, bien porque $d > s'$, o bien porque la elección primera falla, entonces intenta asignar d a la primera partición a través de la comprobación $d \leq s$ &&*admitePartición ds* $(s - d)$ s'. Veamos que esta segunda elección ocurre

```
type Factores = [Integer]
type Suma = Integer

admitePartición :: Factores → Suma → Suma → Bool
esDeZumkeller :: Integer → Bool

admitePartición []        _ _ = False
admitePartición (d : ds) s s'
| d == s || d == s'           = True
| otherwise                   = d ≤ s' && admitePartición ds s (s' − d) ||
                                d ≤ s && admitePartición ds (s − d) s'

esDeZumkeller n = par sigma && sigma ≥ 2 ∗ n &&
                  admitePartición ods ms ms

  where fs    = factoriza n
        sigma = sumaDeDivisores fs
        ods   = divisoresO fs
        ms    = sigma ‘quot‘ 2
```

Figura 1: Un test *casi* voraz

muy pocas veces. Para mostrarlo definimos una nueva función *casiAdmiteParticion* para la cual la última ecuación es:

```
casiAdmitePartición (d : ds) s s'
| d == s || d == s' = True
|d ≤ s'             = casiAdmitePartición ds s (s' − d)
|d ≤ s              = casiAdmitePartición ds (s − d) s'

casiEsDeZumkeller n = par sigma && sigma ≥ 2 ∗ n &&
                      casiAdmitePartición ods ms ms
  where ...
```

Si la llamada *casiEsDeZumkellern* devuelve *True*, con toda seguridad n será de Zumkeller, pero puede devolver *False* para algunos números que sí son de Zumkeller, por tanto la función falla en algunos números. Este nuevo algoritmo es voraz (no *casi*) y el número de pasos para el cómputo de *casiAdmitePartición ds s s'* es proporcional al número de divisores. Como dice [4] (p.211):

> Tal como su nombre indica, el enfoque que aplican (los algoritmos voraces) es *miope*, y toman decisiones basándose en la información que tienen disponible de modo inmediato, sin tener en cuenta los efectos que estas decisiones puedan tener en el futuro . . . Un algoritmo voraz funciona seleccionando el arco, o la tarea, que parezca más prometedora en un determinado instante; nunca reconsidera su decisión, sea cual fuere la situación que pudiera surgir más adelante.

N	*esDeZ*	*casiEsDeZ*	fallos sobre	el	total	% fallos
10,000	0.06	0.06	10	/	2294	0.45
100,000	1.11	1.11	224	/	23051	0.97
200,000	2.42	2.39	474	/	45927	1.03
500,000	7.19	7.06	1950	/	114646	1.70
1,000,000	17.02	16.40	4764	/	229026	2.08
5,000,000	143.21	117.87	35678	/	1143521	2.56
10,000,000	359.05	291.03	81914	/	2287889	3.58
20,000,000	8339.50	746.03	185256	/	4577210	4.05

Tab. 2: Tiempos de ejecución (segundos)

¿Para qué valores de $n \in \mathcal{Z}$ la llamada *casiEsDeZumkeller* n devuelve False? Para analizarlos escribimos un sencillo test:

$$\begin{array}{l} \mathit{Main} > \ [\, n \mid n \ \in \ [1 \,..\, 10000],\ \mathit{esDeZumkeller}\ n \ \neq \ \mathit{casiEsDeZumkeller}\ n] \\ [1190, 1430, 1575, 2090, 3410, 4408, 4510, 5775, 8228, 9765] \end{array}$$

Es decir, el test *casiEsDeZumkeller* solamente falla en 10 números de los primeros 10,000 naturales: Menos del 0.5 % sobre el total de números de Zumkeller en ese intervalo. Desafortunadamente, para intervalos más largos la proporción del número de fallos aumenta:

$$\begin{array}{l} \mathit{Main} > \ \mathit{length}\ [\, n \mid n \ \in \ [1 \,..\, 10^5],\ \mathit{esDeZumkeller}\ n \ \neq \ \mathit{casiEsDeZumkeller}\ n] \\ 224 \\ \mathit{Main} > \ \mathit{length}\ [\, n \mid n \ \in \ [1 \,..\, 10^6],\ \mathit{esDeZumkeller}\ n \ \neq \ \mathit{casiEsDeZumkeller}\ n] \\ 4764 \\ \mathit{Main} > \ \mathit{length}\ [\, n \mid n \ \in \ [1 \,..\, 10^7],\ \mathit{esDeZumkeller}\ n \ \neq \ \mathit{casiEsDeZumkeller}\ n] \\ 81914 \end{array}$$

En la última columna de la Tabla 2 aparece el % de fallos de las diferentes llamadas a la función *casiEsDeZumkeller* sobre el total (aproximadamente el doble al pasar de N a $10N$). Estimamos que para valores pequeños de K (≤ 12) el número de fallos en el intervalo $[1..10^K]$ es del orden de $2^{K-5}10^{K-3}$, y la proporción $0{,}00003125 \cdot 2^K$. En la misma tabla aparecen los tiempos de ejecución de cada uno de los algoritmos. En la Tabla 2 aparecen los tiempos (en segundos) promedio de cómputo de los números de Zumkeller menores de N, para diferentes valores de N, utilizando las dos funciones anteriores y el compilador "The Glasgow Haskell Compiler" ghc-6.10.1[11] sobre un portátil Sony VAIO con una CPU Intel U1400 @ 1.20Ghz y 1Gb de RAM (o sea, una máquina muy modesta) ¡En menos de 2 minutos obtenemos la secuencia ordenada con el primer millón de números de Zumkeller!

Ligeros cambios en la función *admitePartición* permiten devolver las particiones construidas, o incluso buscar solamente particiones con la misma cardinalidad.

[11] `http://www.haskell.org/ghc/`

3. Conclusiones

Hemos estudiado un problema de la Teoría Elemental de Números que resulta ser *duro*, también desde el punto de vista de la $\mathcal{P}ro\mathcal{R}ec$: la forma general y la distribución del conjunto $\mathcal{Z}$ formado por los números de Zumkeller. Hemos caracterizado los límites computacionales que podemos encontrarnos, algunas conjeturas sobre la distribución, y las propiedades esenciales del conjunto $\mathcal{Z}$; todo ello ha sido posible tras encontrar un algoritmo *semi-voraz* para decidir el test $n \in \mathcal{Z}$. Es de resaltar en especial cómo nuestro método basado en cocientes reiterados puede utilizarse tanto para estudiar la estructura de $\mathcal{Z}$ como para derivar programas eficientes basados en cribas.

Pensamos que las ideas del presente trabajo pueden ser útiles para desarrollar aspectos típicos de la teoría elemental de números y de la programación de computadores (sobre todo la Programación Funcional), tanto en la enseñanza secundaria, como en la universitaria.

Estamos estudiando una caracterización de los números $i-$ perfectos[12]: Aquellos que son solución de la ecuación $\sigma\, n = 2(n+i)$, ya que éstos casi caracterizan a los números de Zumkeller; entre éstos los de la forma $n = 2^k p$, con p primo, necesariamente satisfacen que $p = 2^{k+1} - 1 - 2i$. Todos ellos son además de Zumkeller para $i = 0, 1$, mientras que para $i = 2$ solamente los son los pares y los múltiplos de 3. Es curioso que algunos no admiten esa forma; por ejemplo, para $i = 1$ encontramos como excepción el número $650 (= 2^1 5^2 13)$, de donde concluimos que el resultado de Euclides/Euler deja de ser cierto para los 1-perfectos. Otro aspecto a profundizar es la modificación del algoritmo semi-voraz para rebajar su complejidad (casi lineal), así como la explotación de métodos basados en cribas (por ahora los que hemos estudiado no mejoran en la práctica al algoritmo semi-voraz, al menos para secuencias muy grandes de $\mathcal{Z}$).

Los programas utilizados en la elaboración del presente trabajo han sido escritos en el lenguaje de programación Haskell, y están a disposición de los lectores interesados.

Referencias

[1] Albert, A.A. Leonard Eugene Dickson: A Biographical Memoir. Biographical Memoir, pp. 329-345 (1955); National Academy of Sciences, Washington (1994).

[2] Bach, Erich; Miller, Gary and Shallit, Jeffrey. Sums of divisors, perfect numbers and factoring. SIAM Journal on Computing, 15-4, pp. 1143 - 1154 (1986)

[3] Bhaskara, K.P.S. and Peng, Y. On Zumkeller Numbers. En arXiv:0912.0052v1 [math.NT] (2009).

[12] Kravitz (ref. [10], p.46) conjetura que la ecuación $\sigma\, n = 2n + (2j+1)^2$ no tiene solución.

[4] Brassard, G. and Bratley, P. Fundamentals of Algorithmics. Prentice H. (1996).

[5] Carmichael, R.D. A table of multiply perfect numbers. Bull. Amer. Math. Soc. 13, pp 383-386 (1907).

[6] Carmichael, R.D. Even multiply perfect numbers of five different prime factor. Bull. Amer. Math. Soc. Volume 15, Number 1, 7-8 (1908).

[7] Dickson, L.E. Finiteness of the odd perfect and primitive abundant number with n distinct prime factors. Amer. J. Math. vol. 35, pp. 413–422 (1913).

[8] Dickson, L.E. Even abundant numbers. Amer. J. Math. vol. 35 pp. 423–426 (1914).

[9] Dickson, L.E. History of the Theory of Numbers. Carnegie Institute (1919).

[10] Guy, Richard. Unsolved Problems in Intuitive Mathematics. Vol 1: Unsolved problems in Number Theory. 2ª ed. Springer-Verlag (1994).

[11] Hardy, G.H. Autojustificación de un matemático. Ariel (1981). traducción de *A Mathematician's Apology*, Cambridge Univ. Press (1940).

[12] Hardy, G.H. and Wright, E.M. Introduction to The Theory of Numbers. Oxford University Press, 4ª ed. corregida (1968).

[13] Hawking, Stephen. Dios creó los números. Ed. Crítica (2006). Versión española de *God created the integers*, Penguin (2005).

[14] Knuth, Donald. The Art of Computer Programming; vol. 2, *Seminumerical Algorithms*. Addison Wesley, 2ª ed. (1980).

[15] Muñoz, R., Ruiz, B. y Ruiz, M.; Combinaciones de divisores y Números de Zumkeller. Actas de XIII CIAM (Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, Córdoba, Setiembre de 2010).

[16] Pomerance, Carl. Primality testing: Variations on a them of Lucas. Proceed. 13th Meeting of the Fibonacci Association, Congressus Numeratium 201, pp 301-312 (2010)

[17] Ruiz, B.C. et al. Razonando con Haskell. Ed. Thomson (2004). Véase la página del libro en `http://www.lcc.uma.es/RazonandoConHaskell`.

[18] Sylvester, J.J. Sur l´imposibilité de l´existence d´un nombre parfait impair qui ne contient pas au moins 5 diviseurs premiers distincts. C.R. Acad. Sci. París, Vol 106, pp. 522-526 (1888).

[19] Voight, John. Perfect numbers: An elementary introduction (1998).

[20] Voight, J. On the nonexistence of odd perfect numbers. Mass SelectA, A. Math. Soc. (2003).