Technology and its Integration into Mathematics Education
TIME 2010. Sesión TICEMUS
Málaga, del 6 al 10 de julio de 2010

Manuales Electrónicos para la Enseñanza de la Geometría en 2º de Bachillerato

G. Aguilera
J. L. Galán
M.A. Galán
Y. Padilla
P. Rodríguez
F.J. Rodríguez

Grupo EDUMATICUS
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

Líneas de trabajo

- Manuales electrónicos.
- Vídeos educativos.
- Programación con Derive.

Manuales electrónicos

- En los últimos años, la utilización de manuales electrónicos en la docencia se ha impuesto a la de los tradicionales libros de texto.
- Sin embargo, si se analizan los materiales disponibles en el Área de Matemáticas, todos presentan la misma problemática: la edición de las fórmulas matemáticas.

Manuales electrónicos

- El hecho de estar elaborados en formato de páginas web hace que el aspecto no sea el más deseable para unos materiales de calidad.
- Las fórmulas hay que extraerlas del texto en renglones aparte en formato dibujo, lo que crea incluso deformaciones en los textos para “cuadrar” las fórmulas, además del tamaño considerable de los ficheros (lo que retarda la carga de las páginas).

Manuales electrónicos

- Es necesario crear “auténticos” manuales electrónicos de calidad, que tengan un diseño que permita su utilización en pantalla.
- Además, que resulten atractivos para su uso, tanto en clase para las explicaciones como para el estudio personal del alumno.
- Un buen ejemplo de este tipo de presentaciones es el conjunto de materiales MATEX, elaborados por el profesor Javier González de la Universidad de Cantabria.

Manuales electrónicos

- Hace 4 años empezamos con este tipo de manuales en las asignaturas de Matemáticas de la E.T.S.I. Telecomunicación de la UMA.
- Actualmente estamos completando la elaboración de los materiales para los contenidos de la asignatura de Matemáticas en 2º de Bachillerato de Ciencias.

Manuales electrónicos

- En la elaboración de nuestros materiales, hemos utilizado el procesador de textos científicos LATEX combinado con el formato PDF, de forma que se creen presentaciones en PDF con una alta calidad en el aspecto visual de las fórmulas matemáticas.
- La idea fundamental es que puedan ser utilizados tanto en la docencia, con la ayuda de un cañón de proyección, como en el estudio personal del alumnado.

Manuales electrónicos

- Para cada uno de los temas del currículo se elaboran 4 materiales distintos, cada uno de ellos con una finalidad y uso distintos. Para concretar la idea, los materiales serían los siguientes:
  - Tema.PDF
  - Tema_alumnos.PDF
  - Tema_alumnos_imprimir.PDF
  - Tema_relacion.PDF

Tema 2

Determinantes

Contenidos

- Determinantes de orden 2
- Determinantes de orden 3
- Propiedades de los determinantes
- Determinantes de orden n
- Cálculo de la inversa de una matriz
- Rango de una matriz

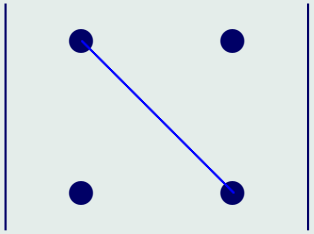
2.1. Determinantes de orden 2

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de orden 2. Se llama determinante de la matriz A y se denota por $\det(A)$ ó $|A|$ a la expresión $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

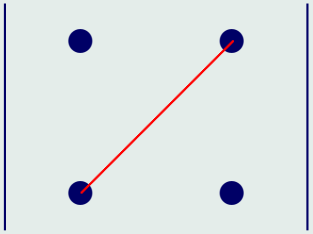
Por ejemplo se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 4 + 6 = 10$$

Esta expresión se puede recordar fácilmente con el siguiente esquema:



positivos



negativos

2.2. Determinantes de orden 3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matriz de orden 3. Se llama determinante de la matriz A y se denota por $\det(A)$ ó $|A|$ a la expresión

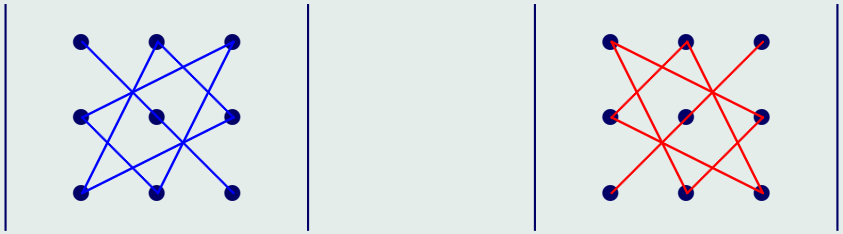
$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Por ejemplo se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) \cdot 3 - 4 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$= 12 + 6 + 8 + 18 - 16 + 2 = 30$$

Esta expresión se puede recordar fácilmente con el siguiente esquema, conocido por la regla de Sarrus:



positivos negativos

De forma similar se define el determinante de las matrices de orden 4, 5, etc., pero dada su complejidad (en orden 4 salen 24 sumandos y en orden 5 salen 120 sumandos), existen otros procedimientos que pasaremos a detallar posteriormente.

2.3. Propiedades de los determinantes

- El determinante de una matriz A coincide con el determinante de su matriz traspuesta A^t, es decir, $|A| = |A^t|$.
- El determinante de un producto de dos matrices A y B coincide con el producto de los determinantes de las dos matrices, es decir, $|AB| = |A| \cdot |B|$.
- Si se permutan entre sí dos líneas (columnas o filas), el determinante cambia de signo. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

  ya que hemos intercambiado la fila primera con la fila tercera.
- Si dos líneas (filas o columnas) son idénticas, el determinante vale 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

  ya que las columnas primera y tercera son iguales.

- Si todos los elementos de una línea (fila o columna) son ceros, el determinante vale 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ya que los elementos de la fila segunda son todos ceros.

- Si todos los elementos de una línea (fila o columna) contienen un factor común, este factor común puede sacarse fuera del determinante. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -9 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

ya que la fila segunda tenía como factor común el número 3.

- Si dos líneas (filas o columnas) son proporcionales, el valor del determinante es 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -9 & 6 & -18 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ya que la tercera columna es el doble que la primera ($C_3 \equiv 2C_1$).

- Si los elementos de cualquier línea (fila o columna) son sumas de igual número de términos, entonces el determinante es suma de tantos determinantes como sumandos figuren en la línea, en la que todas las líneas permanecen inalteradas salvo la que está formada por sumandos, que será reemplazada por el primer sumando en el primer determinante, por el segundo sumando en el segundo determinante, y así sucesivamente. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ e & f \end{vmatrix}$$

- El valor de un determinante no varía si a los elementos de una línea (fila o columna) se le suman los correspondientes de otra paralela multiplicados por un número real k. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

ya que a la tercera fila se le ha sumado el doble de la primera (se ha sustituido la F_3 por $F_3 + 2F_1$).

De forma más general, si a una línea (fila o columna) se le suma una combinación lineal de las restantes líneas (filas o columnas), el determinante no varía. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 14 & 21 \end{vmatrix}$$

ya que a la tercera fila se le ha sumado el doble de la primera y el triple de la segunda (se ha sustituido la F_3 por $F_3 + 2F_1 + 3F_2$).

- Si una línea (fila o columna) es combinación lineal de las restantes líneas (filas o columnas), el determinante vale 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

ya que la tercera columna es la segunda columna menos dos veces la primera ($C_3 \equiv C_2 - 2C_1$).

2.4. Determinantes de orden n

Menor complementario de un elemento de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n y sea a_{ij} uno de sus elementos. Si se suprime en A la fila i y la columna j se obtiene una submatriz cuadrada de orden $n-1$ que recibe el nombre de submatriz complementaria del elemento a_{ij}. Al determinante de esta submatriz se le llama menor complementario del elemento a_{ij} y se representa por α_{ij}.

Adjunto de un elemento de una matriz

Por otra parte, se llama adjunto del elemento a_{ij} y se representa por A_{ij} al menor complementario de a_{ij} precedido del signo $+$ ó $-$ según que $i+j$ sea par o impar. Es decir,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

Por ejemplo, dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, la submatriz complementaria del elemento a_{12} es la matriz $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ y, por lo tanto, su menor complementario α_{12} es

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot 9 - 0 \cdot (-3) = 63$$

Por otra parte, como $1+2=3$, su adjunto A_{12} será $(-1)^3 \cdot 63 = -63$.

Matriz adjunta de una matriz

Sea A una matriz. Se llama matriz adjunta de A, y se representa por $\text{Adj}(A)$, a la matriz que resulta de sustituir cada uno de los elementos de la matriz A por su adjunto. Es decir, si por ejemplo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Cálculo práctico de determinantes de orden n

El determinante de una matriz A cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) cualquiera por sus adjuntos respectivos. Es decir, tomando por ejemplo la fila i, se obtiene

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

Este resultado es de vital importancia para el cálculo de determinantes de orden 4 o mayor. Por ejemplo, un determinante de orden 4 se puede convertir en 4 determinantes de orden 3. Veamos un ejemplo. Desarrollando por la primera fila se tiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$-(-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 21 - 3(-30) + 4(-25) + 2 \cdot 28 = 21 + 90 - 100 + 56 = 67$$

Además, se puede combinar esta técnica con la aplicación de las propiedades de los determinantes para, por ejemplo, "buscar" unos cuantos ceros en el determinante y así facilitar los cálculos. Veamos de nuevo un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 10 & 10 & -3 \\ 0 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & -6 & -14 & 11 \end{vmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} F_2 \equiv F_2 + 2F_1 \\ F_3 \equiv F_3 - 2F_1 \\ F_4 \equiv F_4 - 3F_1 \end{array} \right.$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 10 & -3 \\ -7 & -5 & 1 \\ -6 & -14 & 11 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -7 & -5 & 1 \\ -6 & -14 & 11 \end{vmatrix}$$

$$+0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 10 & 10 & -3 \\ -6 & -14 & 11 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 10 & 10 & -3 \\ -7 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 96$$

2.5. Cálculo de la inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces se verifica que A es una matriz inversible si y sólo si su determinante no es nulo.

La inversa A^{-1} de una matriz inversible A se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj}\left(A^t\right)$$

2.6. Rango de una matriz

Sea A una matriz de orden mxn. Se llama menor de orden k, donde k es menor o igual que m y n, al determinante de una matriz cuadrada de orden k que resulta de eliminar $m-k$ filas y $n-k$ columnas de la matriz A.

Se dice que la matriz A es de rango o característica h, cuando en ella existe, por lo menos, un menor de orden h distinto de cero, siendo nulos todos los menores posibles de orden superior a h. En tal caso, todo menor no nulo de orden h se llama menor principal de A.

Si en una matriz una línea (fila o columna) es combinación lineal de las restantes líneas (filas o columnas), entonces el rango de la matriz que resulta al eliminar esa línea es el mismo que el de la matriz inicial.

Dado un menor de una matriz, se pueden formar otros menores de un orden superior con una fila y una columna más, añadiendo los elementos de otra fila y otra columna cualesquiera. Este procedimiento recibe el nombre de orlar el menor.

En la práctica, para calcular el rango de una matriz es preferible iniciar el proceso por un menor de orden 2 no nulo e ir orlándolo progresivamente; si no existiese un menor de orden 2 no nulo, el rango de la matriz sería 1, pues, salvo en el caso de la matriz nula, siempre se puede encontrar un menor de orden 1 no nulo.

Tema 2

Determinantes

Contenidos

- Determinantes de orden 2
- Determinantes de orden 3
- Propiedades de los determinantes
- Determinantes de orden n
- Cálculo de la inversa de una matriz
- Rango de una matriz

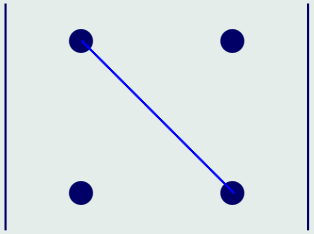
2.1. Determinantes de orden 2

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de orden 2. Se llama determinante de la matriz A y se denota por $\det(A)$ ó $|A|$ a la expresión $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

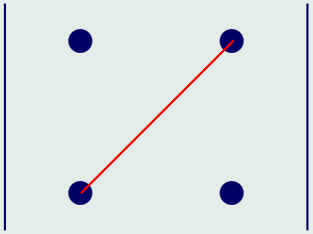
Por ejemplo se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 4 + 6 = 10$$

Esta expresión se puede recordar fácilmente con el siguiente esquema:



positivos



negativos

Ejemplo 2.1

Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$\text{(a)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -2 - 12 = -14$

(b) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2 = a^2 b^2 (b - a)$

------ o ------

2.2. Determinantes de orden 3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matriz de orden 3. Se llama determinante de la matriz A y se denota por $\det(A)$ ó $|A|$ a la expresión

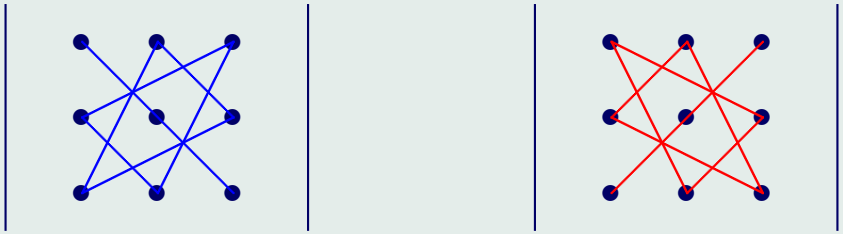
$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Por ejemplo se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) \cdot 3 - 4 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$= 12 + 6 + 8 + 18 - 16 + 2 = 30$$

Esta expresión se puede recordar fácilmente con el siguiente esquema, conocido por la regla de Sarrus:



positivos negativos

De forma similar se define el determinante de las matrices de orden 4, 5, etc., pero dada su complejidad (en orden 4 salen 24 sumandos y en orden 5 salen 120 sumandos), existen otros procedimientos que pasaremos a detallar posteriormente.

Ejemplo 2.2

Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$(a)\quad \begin{vmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 1 & -6 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} \qquad\qquad (b)\quad \begin{vmatrix} 10 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$(a)\quad \begin{vmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 1 & -6 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 7(-6)(-2) + 0\cdot 1\cdot 2 + 7\cdot 1\cdot 4 - 0\cdot 1(-2) - 7(-6)2 - 7\cdot 1\cdot 4$$

$$= 84 + 0 + 28 - 0 + 84 - 28 = 168$$

$$(b)\quad \begin{vmatrix} 10 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 10\cdot 5\cdot 0 + (-2)1\cdot 3 + 3\cdot 0(-4) - (-2)0\cdot 0 - 3\cdot 5\cdot 3 - 10\cdot 1(-4)$$

$$= 0 - 6 + 0 - 0 - 45 + 40 = -11$$

------ o ------

Ejemplo 2.3

Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0.$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 7 + x \cdot 9 \cdot 1 + (-2)4 \cdot 0 - x \cdot 4 \cdot 7 - (-2)3 \cdot 1 - 5 \cdot 9 \cdot 0$$

$$= 105 + 9x - 28x + 6 = -19x + 111$$

Por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0 \iff -19x + 111 = 0 \iff \boxed{x = \frac{111}{19}}$$

------ o ------

2.3. Propiedades de los determinantes

- El determinante de una matriz A coincide con el determinante de su matriz traspuesta A^t, es decir, $|A| = |A^t|$.
- El determinante de un producto de dos matrices A y B coincide con el producto de los determinantes de las dos matrices, es decir, $|AB| = |A| \cdot |B|$.
- Si se permutan entre sí dos líneas (columnas o filas), el determinante cambia de signo. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

  ya que hemos intercambiado la fila primera con la fila tercera.
- Si dos líneas (filas o columnas) son idénticas, el determinante vale 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

  ya que las columnas primera y tercera son iguales.

- Si todos los elementos de una línea (fila o columna) son ceros, el determinante vale 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

  ya que los elementos de la fila segunda son todos ceros.

- Si todos los elementos de una línea (fila o columna) contienen un factor común, este factor común puede sacarse fuera del determinante. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -9 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

  ya que la fila segunda tenía como factor común el número 3.

- Si dos líneas (filas o columnas) son proporcionales, el valor del determinante es 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -9 & 6 & -18 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

  ya que la tercera columna es el doble que la primera ($C_3 \equiv 2C_1$).

- Si los elementos de cualquier línea (fila o columna) son sumas de igual número de términos, entonces el determinante es suma de tantos determinantes como sumandos figuren en la línea, en la que todas las líneas permanecen inalteradas salvo la que está formada por sumandos, que será reemplazada por el primer sumando en el primer determinante, por el segundo sumando en el segundo determinante, y así sucesivamente. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ e & f \end{vmatrix}$$

- El valor de un determinante no varía si a los elementos de una línea (fila o columna) se le suman los correspondientes de otra paralela multiplicados por un número real k. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

ya que a la tercera fila se le ha sumado el doble de la primera (se ha sustituido la F_3 por $F_3 + 2F_1$).

De forma más general, si a una línea (fila o columna) se le suma una combinación lineal de las restantes líneas (filas o columnas), el determinante no varía. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 14 & 21 \end{vmatrix}$$

ya que a la tercera fila se le ha sumado el doble de la primera y el triple de la segunda (se ha sustituido la F_3 por $F_3 + 2F_1 + 3F_2$).

- Si una línea (fila o columna) es combinación lineal de las restantes líneas (filas o columnas), el determinante vale 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

ya que la tercera columna es la segunda columna menos dos veces la primera ($C_3 \equiv C_2 - 2C_1$).

Ejemplo 2.4

Comprueba sin desarrollar que el determinante $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 10 & 21 & 2 \\ 14 & 15 & 7 \end{vmatrix}$ *es múltiplo de* 6.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 10 & 21 & 2 \\ 14 & 15 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & 3\cdot 1 \\ 10 & 21 & 2 \\ 14 & 15 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 10 & 21 & 2 \\ 14 & 15 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 3 & 1 \\ 2\cdot 5 & 21 & 2 \\ 2\cdot 7 & 15 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 21 & 2 \\ 7 & 15 & 7 \end{vmatrix} = 6\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 21 & 2 \\ 7 & 15 & 7 \end{vmatrix}}_{k} = 6k$$

Por lo tanto, se tiene que $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 10 & 21 & 2 \\ 14 & 15 & 7 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 6.

------ o ------

Ejemplo 2.5

Comprueba sin desarrollar que se verifica $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0.$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1+a+b+c & 1+b+c+a & 1+c+a+b \end{vmatrix} \quad F_3 \equiv F_1 + F_2 + F_3$$

$$= (1+a+b+c) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{0 \text{ ya que } F_1 = F_3} = 0$$

- - - - - - o - - - - - -

Ejemplo 2.6

Comprueba sin desarrollar que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ *es múltiplo de* 13.

Solución:

Podemos observar que 143, 221 y 247 son múltiplos de 13 ya que $\begin{cases} 143 = 13 \cdot 11 \\ 221 = 13 \cdot 17 \\ 247 = 13 \cdot 19 \end{cases}$

Por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 143 \\ 2 & 2 & 221 \\ 2 & 4 & 247 \end{vmatrix} \quad C_3 \equiv 100\, C_1 + 10\, C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 13 \cdot 11 \\ 2 & 2 & 13 \cdot 17 \\ 2 & 4 & 13 \cdot 19 \end{vmatrix} = 13 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 2 & 2 & 17 \\ 2 & 4 & 19 \end{vmatrix}}_{k} = 13k$$

Por lo tanto, se tiene que $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 13.

------ o ------

2.4. Determinantes de orden n

Menor complementario de un elemento de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n y sea a_{ij} uno de sus elementos. Si se suprime en A la fila i y la columna j se obtiene una submatriz cuadrada de orden $n-1$ que recibe el nombre de submatriz complementaria del elemento a_{ij}. Al determinante de esta submatriz se le llama menor complementario del elemento a_{ij} y se representa por α_{ij}.

Adjunto de un elemento de una matriz

Por otra parte, se llama adjunto del elemento a_{ij} y se representa por A_{ij} al menor complementario de a_{ij} precedido del signo $+$ ó $-$ según que $i+j$ sea par o impar. Es decir,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

Por ejemplo, dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, la submatriz complementaria del elemento a_{12} es la matriz $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ y, por lo tanto, su menor complementario α_{12} es

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot 9 - 0 \cdot (-3) = 63$$

Por otra parte, como $1+2=3$, su adjunto A_{12} será $(-1)^3 \cdot 63 = -63$.

Matriz adjunta de una matriz

Sea A una matriz. Se llama matriz adjunta de A, y se representa por $\text{Adj}(A)$, a la matriz que resulta de sustituir cada uno de los elementos de la matriz A por su adjunto. Es decir, si por ejemplo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.7

Hallar la matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2\big(5 \cdot 2 - 4 \cdot (-1)\big) = 10 + 4 = 14$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3\big(3 \cdot 2 - 0 \cdot (-1)\big) = (-1) \cdot 6 = -6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^4\big(3 \cdot 4 - 0 \cdot 5\big) = 12$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3\big((-2) \cdot 2 - 4 \cdot 3\big) = (-1) \cdot (-16) = 16$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4\big(1\cdot 2 - 0\cdot 3\big) = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^5\big(1\cdot 4 - 0\cdot(-2)\big) = (-1)\cdot 4 = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^4\big((-2)\cdot(-1) - 5\cdot 3\big) = 2 - 15 = -13$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^5\big(1\cdot(-1) - 3\cdot 3\big) = (-1)\cdot(-10) = 10$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^6\big(1\cdot 5 - 3\cdot(-2)\big) = 5 + 6 = 11$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -6 & 12 \\ 16 & 2 & -4 \\ -13 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

------ o ------

Cálculo práctico de determinantes de orden n

El determinante de una matriz A cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) cualquiera por sus adjuntos respectivos. Es decir, tomando por ejemplo la fila i, se obtiene

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

Este resultado es de vital importancia para el cálculo de determinantes de orden 4 o mayor. Por ejemplo, un determinante de orden 4 se puede convertir en 4 determinantes de orden 3. Veamos un ejemplo. Desarrollando por la primera fila se tiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$-(-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 21 - 3(-30) + 4(-25) + 2 \cdot 28 = 21 + 90 - 100 + 56 = 67$$

Además, se puede combinar esta técnica con la aplicación de las propiedades de los determinantes para, por ejemplo, "buscar" unos cuantos ceros en el determinante y así facilitar los cálculos. Veamos de nuevo un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 10 & 10 & -3 \\ 0 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & -6 & -14 & 11 \end{vmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} F_2 \equiv F_2 + 2F_1 \\ F_3 \equiv F_3 - 2F_1 \\ F_4 \equiv F_4 - 3F_1 \end{array} \right.$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 10 & -3 \\ -7 & -5 & 1 \\ -6 & -14 & 11 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -7 & -5 & 1 \\ -6 & -14 & 11 \end{vmatrix}$$

$$+0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 10 & 10 & -3 \\ -6 & -14 & 11 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 10 & 10 & -3 \\ -7 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 96$$

Ejemplo 2.8

Calcular el valor de los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 15 & 1 & 14 & 10 \\ 6 & 12 & 7 & -9 \\ 10 & 8 & 11 & -15 \\ 3 & 2 & 2 & 10 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Solución:

(a)
$$\begin{vmatrix} 15 & 1 & 14 & 10 \\ 6 & 12 & 7 & -9 \\ 10 & 8 & 11 & -15 \\ 3 & 2 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 14 & 10 \\ -1 & 12 & 7 & -9 \\ -1 & 8 & 11 & -15 \\ 1 & 2 & 2 & 10 \end{vmatrix} \quad C_1 \equiv C_1 - C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 14 & 10 \\ 0 & 13 & 21 & 1 \\ 0 & 9 & 25 & -5 \\ 0 & 1 & -12 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} F_2 \equiv F_2 + F_1 \\ F_3 \equiv F_3 + F_1 \\ F_4 \equiv F_4 - F_1 \end{cases}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 21 & 1 \\ 9 & 25 & -5 \\ 1 & -12 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 14 & 10 \\ 9 & 25 & -5 \\ 1 & -12 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 14 & 10 \\ 13 & 21 & 1 \\ 1 & -12 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 14 & 10 \\ 13 & 21 & 1 \\ 9 & 25 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 13 \cdot 25 \cdot 0 + 21(-5)1 + 1 \cdot 9(-12)$$
$$-21 \cdot 9 \cdot 0 - 1 \cdot 25 \cdot 1 - 13(-5)(-12)$$
$$= 0 - 105 - 108 - 0 - 25 - 780 = -1018$$

(b) $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{desarrollando por } C_1$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{desarrollando por } C_1$$

$$= 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{desarrollando por } F_1$$

$$= 6(3 \cdot 2 - 1 \cdot 4) = 6 \cdot 2 = 12$$

------ o ------

2.5. Cálculo de la inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces se verifica que A es una matriz inversible si y sólo si su determinante no es nulo.

La inversa A^{-1} de una matriz inversible A se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj}\left(A^t\right)$$

Ejemplo 2.9

Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

Comenzamos calculando el determinante de la matriz A.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 18 + 6 + 8 - 36 - 3 - 8 = -15 \neq 0$$

Por lo tanto, la matriz A es inversible.

Pasamos a calcular su matriz traspuesta:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la matriz adjunta de esa matriz traspuesta:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2\big(3\cdot 3 - 2\cdot 2\big) = 9 - 4 = 5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3\big(3\cdot 3 - 1\cdot 2\big) = (-1)(9-2) = -7$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4\big(3\cdot 2 - 1\cdot 3\big) = 6 - 3 = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3\big(4\cdot 3 - 2\cdot 1\big) = (-1)(12-2) = -10$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4\big(2\cdot 3 - 1\cdot 1\big) = 6 - 1 = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5\big(2\cdot 2 - 1\cdot 4\big) = (-1)(4-4) = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4\big(4\cdot 2 - 3\cdot 1\big) = 8 - 3 = 5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5\big(2\cdot 2 - 3\cdot 1\big) = (-1)(4-3) = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^6\big(2\cdot 3 - 3\cdot 4\big) = 6 - 12 = -6$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\text{Adj}\left(A^t\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -10 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

y así, como $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\,\text{Adj}\left(A^t\right)$, podemos concluir que

$$A^{-1} = \frac{1}{-15}\begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -10 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{7}{15} & -\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{15} & \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$$

------ o ------

Ejemplo 2.10

Resolver la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Solución:

Nombremos por

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nuestra ecuación matricial queda $RAS = T$. Operando, y siempre que las matrices R^{-1} y S^{-1} existan, nos queda:

$$RAS = T \implies R^{-1}RASS^{-1} = R^{-1}TS^{-1} \implies A = R^{-1}TS^{-1},$$

Comenzamos calculando el determinante de la matriz R.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$$

Por lo tanto, la matriz R es inversible.

Pasamos a calcular su matriz traspuesta:

$$R^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la matriz adjunta de esa matriz traspuesta:

$$R_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \big(1 \cdot 0 - 1 \cdot 1\big) = 0 - 1 = -1$$

$$R_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \big(1 \cdot 0 - 0 \cdot 1\big) = (-1)(0 - 0) = 0$$

$$R_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \big(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1\big) = 1 - 0 = 1$$

$$R_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3\big(0\cdot 0 - 1\cdot 0\big) = (-1)(0-0) = 0$$

$$R_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4\big(1\cdot 0 - 0\cdot 0\big) = 0 - 0 = 0$$

$$R_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5\big(1\cdot 1 - 0\cdot 0\big) = (-1)(1-0) = -1$$

$$R_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4\big(0\cdot 1 - 1\cdot 0\big) = 0 - 0 = 0$$

$$R_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5\big(1\cdot 1 - 1\cdot 0\big) = (-1)(1-0) = -1$$

$$R_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6\big(1\cdot 1 - 1\cdot 0\big) = 1 - 0 = 1$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\text{Adj}\left(R^t\right) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y así, como $R^{-1} = \dfrac{1}{|R|}\,\text{Adj}\left(R^t\right)$, podemos concluir que

$$R^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Seguimos calculando el determinante de la matriz S.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 0\cdot 1 = 2 \neq 0$$

Por lo tanto, la matriz S también es inversible.

Pasamos a calcular su matriz traspuesta:

$$S^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la matriz adjunta de esa matriz traspuesta:

$$S_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2\big(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1\big) = 1 - 0 = 1$$

$$S_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3\big(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1\big) = (-1)(1 - 0) = -1$$

$$S_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4\big(1 \cdot 0 - 0 \cdot 1\big) = 0 - 0 = 0$$

$$S_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3\big(0 \cdot 1 - 0 \cdot 1\big) = (-1)(0 - 0) = 0$$

$$S_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4\big(2 \cdot 1 - 0 \cdot 1\big) = 2 - 0 = 2$$

$$S_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5\big(2\cdot 0 - 0\cdot 0\big) = (-1)(0-0) = 0$$

$$S_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4\big(0\cdot 1 - 1\cdot 1\big) = 0 - 1 = -1$$

$$S_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5\big(2\cdot 1 - 1\cdot 1\big) = (-1)(2-1) = -1$$

$$S_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6\big(2\cdot 1 - 1\cdot 0\big) = 2 - 0 = 2$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\text{Adj}\left(S^t\right) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y así, como $S^{-1} = \dfrac{1}{|S|}\,\text{Adj}\left(S^t\right)$, podemos concluir que

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A = R^{-1}TS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 6 & -2 & -6 \\ -3 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -6 \\ -3 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

------ o ------

Ejemplo 2.11

Hallar los distintos valores de m *para que la matriz* $B = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *sea inversible.*

Hallar la matriz inversa en el caso $m = 2$.

Solución:

Comenzamos calculando el determinante de la matriz B.

$$\begin{vmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)1 + (-1)1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 0 - (-1)1 \cdot 1 - 0(m-1)1 - m \cdot 1 \cdot 0$$

$$= m^2 - m - 1 + 0 + 1 - 0 - 0 = m^2 - m$$

Así,

$$|B| = 0 \iff m^2 - m = 0 \iff m(m-1) = 0 \iff \begin{cases} m = 0 \\ m - 1 = 0 \implies m = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, la matriz B es inversible si $m \neq 0$ y $m \neq 1$.

Pasemos a calcular la matriz inversa cuando $m = 2$. La matriz queda $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sabemos que $|B| = \underbrace{m^2 - m}_{m=2} = 2^2 - 2 = 2$.

Por otra parte,

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto,

$$\text{Adj}\left(B^t\right) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y así, como $B^{-1} = \dfrac{1}{|B|}\,\text{Adj}\left(B^t\right)$, podemos concluir que

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

------ o ------

2.6. Rango de una matriz

Sea A una matriz de orden mxn. Se llama menor de orden k, donde k es menor o igual que m y n, al determinante de una matriz cuadrada de orden k que resulta de eliminar $m-k$ filas y $n-k$ columnas de la matriz A.

Se dice que la matriz A es de rango o característica h, cuando en ella existe, por lo menos, un menor de orden h distinto de cero, siendo nulos todos los menores posibles de orden superior a h. En tal caso, todo menor no nulo de orden h se llama menor principal de A.

Si en una matriz una línea (fila o columna) es combinación lineal de las restantes líneas (filas o columnas), entonces el rango de la matriz que resulta al eliminar esa línea es el mismo que el de la matriz inicial.

Dado un menor de una matriz, se pueden formar otros menores de un orden superior con una fila y una columna más, añadiendo los elementos de otra fila y otra columna cualesquiera. Este procedimiento recibe el nombre de orlar el menor.

En la práctica, para calcular el rango de una matriz es preferible iniciar el proceso por un menor de orden 2 no nulo e ir orlándolo progresivamente; si no existiese un menor de orden 2 no nulo, el rango de la matriz sería 1, pues, salvo en el caso de la matriz nula, siempre se puede encontrar un menor de orden 1 no nulo.

Ejemplo 2.12

Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Solución:

La matriz A es de orden 5x4. Por lo tanto, podemos asegurar que rango$(A) \leq 4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ podemos afirmar que rango$(A) \geq 2$.

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

Además, como $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ podemos afirmar que rango$(A) \geq 3$.

Orlando este último menor de todas las formas posibles obtenemos los siguientes menores de orden 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 6 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

Podemos observar que ambos menores son nulos, ya que, en ambos casos, $C_2 \equiv -2C_1$.

Por lo tanto, podemos concluir que rango$(A) = 3$.

------ o ------

Ejemplo 2.13

Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 2 & -1 & k & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ *según los distintos valores de* k.

Solución:

La matriz A es de orden 3x4. Por lo tanto, podemos asegurar que rango$(A) \leq 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 2 & -1 & k & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$ podemos afirmar que rango$(A) \geq 2$.

Orlando este menor de todas las formas posibles obtenemos los siguientes menores de orden 3:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & k \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix}}_{a} \quad ; \quad \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix}}_{b}$$

Calculemos el valor de estos dos menores:

$$a = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & k \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 1(-1)(-6) + k \cdot k \cdot 1 + (-1)2 \cdot 10 - k \cdot 2(-6) - (-1)(-1)1 - 1 \cdot k \cdot 10$$

$$= 6 + k^2 - 20 + 12k - 1 - 10k = k^2 + 2k - 15$$

$$b = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)1 + k \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 10 - k \cdot 2 \cdot 1 - 2(-1)1 - 1 \cdot 5 \cdot 10$$

$$= -1 + 5k + 40 - 2k + 2 - 50 = 3k - 9$$

Observemos que se tiene que

$$a = 0 \iff k^2 + 2k - 15 = 0 \iff k = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$\iff \begin{cases} k = \dfrac{-2+8}{2} = 3 \\ \\ k = \dfrac{-2-8}{2} = -5 \end{cases}$$

$$b = 0 \iff 3k - 9 = 0 \iff k = \frac{9}{3} = 3$$

Resumiendo:

- Si $k = 3$ se tiene que $a = 0$; $b = 0$.
- Si $k = -5$ se tiene que $a = 0$; $b \neq 0$.
- Si $k \neq 3$ y $k \neq -5$ se tiene que $a \neq 0$; $b \neq 0$.

Por lo tanto, podemos concluir que $\begin{cases} \text{si } k = 3 \implies \text{rango}(A) = 2 \\ \\ \text{si } k \neq 3 \implies \text{rango}(A) = 3 \end{cases}$

- - - - - - ∘ - - - - - -

Tema 2

Determinantes

Contenidos

- Determinantes de orden 2
- Determinantes de orden 3
- Propiedades de los determinantes
- Determinantes de orden n
- Cálculo de la inversa de una matriz
- Rango de una matriz

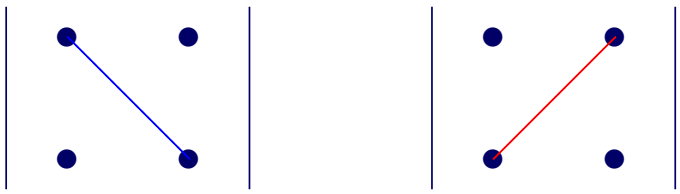
2.1. Determinantes de orden 2

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de orden 2. Se llama determinante de la matriz A y se denota por $\det(A)$ ó $|A|$ a la expresión $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Por ejemplo se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 4 + 6 = 10$$

Esta expresión se puede recordar fácilmente con el siguiente esquema:



positivos negativos

Ejemplo 2.1

Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$\text{(a)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -2 - 12 = -14$

(b) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2 = a^2 b^2 (b - a)$

------ o ------

2.2. Determinantes de orden 3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matriz de orden 3. Se llama determinante de la matriz A y se denota por $\det(A)$ ó $|A|$ a la expresión

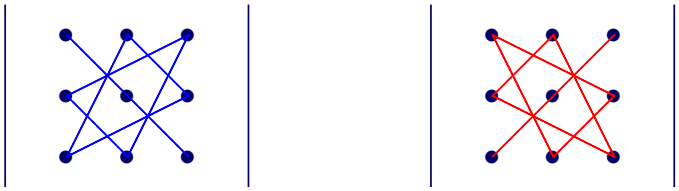
$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Por ejemplo se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) \cdot 3 - 4 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$= 12 + 6 + 8 + 18 - 16 + 2 = 30$$

Esta expresión se puede recordar fácilmente con el siguiente esquema, conocido por la regla de Sarrus:



positivos negativos

De forma similar se define el determinante de las matrices de orden 4, 5, etc., pero dada su complejidad (en orden 4 salen 24 sumandos y en orden 5 salen 120 sumandos), existen otros procedimientos que pasaremos a detallar posteriormente.

Ejemplo 2.2

Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$(a)\quad \begin{vmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 1 & -6 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} \qquad (b)\quad \begin{vmatrix} 10 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$(a)\quad \begin{vmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 1 & -6 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 7(-6)(-2) + 0\cdot 1\cdot 2 + 7\cdot 1\cdot 4 - 0\cdot 1(-2) - 7(-6)2 - 7\cdot 1\cdot 4$$

$$= 84 + 0 + 28 - 0 + 84 - 28 = 168$$

$$(b)\quad \begin{vmatrix} 10 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 10\cdot 5\cdot 0 + (-2)1\cdot 3 + 3\cdot 0(-4) - (-2)0\cdot 0 - 3\cdot 5\cdot 3 - 10\cdot 1(-4)$$

$$= 0 - 6 + 0 - 0 - 45 + 40 = -11$$

- - - - - - ○ - - - - - -

Ejemplo 2.3

Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0.$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot 7 + x\cdot 9\cdot 1 + (-2)4\cdot 0 - x\cdot 4\cdot 7 - (-2)3\cdot 1 - 5\cdot 9\cdot 0$$

$$= 105 + 9x - 28x + 6 = -19x + 111$$

Por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0 \iff -19x + 111 = 0 \iff x = \frac{111}{19}$$

------ o ------

2.3. Propiedades de los determinantes

- El determinante de una matriz A coincide con el determinante de su matriz traspuesta A^t, es decir, $|A| = |A^t|$.
- El determinante de un producto de dos matrices A y B coincide con el producto de los determinantes de las dos matrices, es decir, $|AB| = |A|\cdot|B|$.
- Si se permutan entre sí dos líneas (columnas o filas), el determinante cambia de signo. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

  ya que hemos intercambiado la fila primera con la fila tercera.
- Si dos líneas (filas o columnas) son idénticas, el determinante vale 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

  ya que las columnas primera y tercera son iguales.

- Si todos los elementos de una línea (fila o columna) son ceros, el determinante vale 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ya que los elementos de la fila segunda son todos ceros.

- Si todos los elementos de una línea (fila o columna) contienen un factor común, este factor común puede sacarse fuera del determinante. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -9 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

ya que la fila segunda tenía como factor común el número 3.

- Si dos líneas (filas o columnas) son proporcionales, el valor del determinante es 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -9 & 6 & -18 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ya que la tercera columna es el doble que la primera ($C_3 \equiv 2C_1$).

- Si los elementos de cualquier línea (fila o columna) son sumas de igual número de términos, entonces el determinante es suma de tantos determinantes como sumandos figuren en la línea, en la que todas las líneas permanecen inalteradas salvo la que está formada por sumandos, que será reemplazada por el primer sumando en el primer determinante, por el segundo sumando en el segundo determinante, y así sucesivamente. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ e & f \end{vmatrix}$$

- El valor de un determinante no varía si a los elementos de una línea (fila o columna) se le suman los correspondientes de otra paralela multiplicados por un número real k. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

ya que a la tercera fila se le ha sumado el doble de la primera (se ha sustituido la F_3 por $F_3 + 2F_1$).

De forma más general, si a una línea (fila o columna) se le suma una combinación lineal de las restantes líneas (filas o columnas), el determinante no varía. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 14 & 21 \end{vmatrix}$$

ya que a la tercera fila se le ha sumado el doble de la primera y el triple de la segunda (se ha sustituido la F_3 por $F_3 + 2F_1 + 3F_2$).

- Si una línea (fila o columna) es combinación lineal de las restantes líneas (filas o columnas), el determinante vale 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

ya que la tercera columna es la segunda columna menos dos veces la primera ($C_3 \equiv C_2 - 2C_1$).

Ejemplo 2.4

Comprueba sin desarrollar que el determinante $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 10 & 21 & 2 \\ 14 & 15 & 7 \end{vmatrix}$ *es múltiplo de* 6.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 10 & 21 & 2 \\ 14 & 15 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & 3\cdot 1 \\ 10 & 21 & 2 \\ 14 & 15 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 10 & 21 & 2 \\ 14 & 15 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 3 & 1 \\ 2\cdot 5 & 21 & 2 \\ 2\cdot 7 & 15 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 21 & 2 \\ 7 & 15 & 7 \end{vmatrix} = 6\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 21 & 2 \\ 7 & 15 & 7 \end{vmatrix}}_{k} = 6k$$

Por lo tanto, se tiene que $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 10 & 21 & 2 \\ 14 & 15 & 7 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 6.

------ o ------

Ejemplo 2.5

Comprueba sin desarrollar que se verifica $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0.$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1+a+b+c & 1+b+c+a & 1+c+a+b \end{vmatrix} \quad F_3 \equiv F_1 + F_2 + F_3$$

$$= (1+a+b+c)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{0 \text{ ya que } F_1 = F_3} = 0$$

------ o ------

Ejemplo 2.6

Comprueba sin desarrollar que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ *es múltiplo de* 13.

Solución:

Podemos observar que 143, 221 y 247 son múltiplos de 13 ya que $\begin{cases} 143 = 13 \cdot 11 \\ 221 = 13 \cdot 17 \\ 247 = 13 \cdot 19 \end{cases}$

Por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 143 \\ 2 & 2 & 221 \\ 2 & 4 & 247 \end{vmatrix} \quad C_3 \equiv 100\, C_1 + 10\, C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 13 \cdot 11 \\ 2 & 2 & 13 \cdot 17 \\ 2 & 4 & 13 \cdot 19 \end{vmatrix} = 13 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 2 & 2 & 17 \\ 2 & 4 & 19 \end{vmatrix}}_{k} = 13k$$

Por lo tanto, se tiene que $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 13.

------ o ------

2.4. Determinantes de orden n

Menor complementario de un elemento de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n y sea a_{ij} uno de sus elementos. Si se suprime en A la fila i y la columna j se obtiene una submatriz cuadrada de orden $n-1$ que recibe el nombre de submatriz complementaria del elemento a_{ij}. Al determinante de esta submatriz se le llama menor complementario del elemento a_{ij} y se representa por α_{ij}.

Adjunto de un elemento de una matriz

Por otra parte, se llama adjunto del elemento a_{ij} y se representa por A_{ij} al menor complementario de a_{ij} precedido del signo $+$ ó $-$ según que $i+j$ sea par o impar. Es decir,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$$

Por ejemplo, dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, la submatriz complementaria del elemento a_{12} es la matriz $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ y, por lo tanto, su menor complementario α_{12} es

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot 9 - 0 \cdot (-3) = 63$$

Por otra parte, como $1 + 2 = 3$, su adjunto A_{12} será $(-1)^3 \cdot 63 = -63$.

Matriz adjunta de una matriz

Sea A una matriz. Se llama matriz adjunta de A, y se representa por $\text{Adj}(A)$, a la matriz que resulta de sustituir cada uno de los elementos de la matriz A por su adjunto. Es decir, si por ejemplo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.7

Hallar la matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2\big(5 \cdot 2 - 4 \cdot (-1)\big) = 10 + 4 = 14$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3\big(3 \cdot 2 - 0 \cdot (-1)\big) = (-1) \cdot 6 = -6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^4\big(3 \cdot 4 - 0 \cdot 5\big) = 12$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3\big((-2) \cdot 2 - 4 \cdot 3\big) = (-1) \cdot (-16) = 16$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4(1\cdot 2 - 0\cdot 3) = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^5(1\cdot 4 - 0\cdot(-2)) = (-1)\cdot 4 = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^4((-2)\cdot(-1) - 5\cdot 3) = 2 - 15 = -13$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^5(1\cdot(-1) - 3\cdot 3) = (-1)\cdot(-10) = 10$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^6(1\cdot 5 - 3\cdot(-2)) = 5 + 6 = 11$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -6 & 12 \\ 16 & 2 & -4 \\ -13 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

------ o ------

Cálculo práctico de determinantes de orden n

El determinante de una matriz A cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) cualquiera por sus adjuntos respectivos. Es decir, tomando por ejemplo la fila i, se obtiene

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

Este resultado es de vital importancia para el cálculo de determinantes de orden 4 o mayor. Por ejemplo, un determinante de orden 4 se puede convertir en 4 determinantes de orden 3. Veamos un ejemplo. Desarrollando por la primera fila se tiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$-(-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 21 - 3(-30) + 4(-25) + 2\cdot 28 = 21 + 90 - 100 + 56 = 67$$

Además, se puede combinar esta técnica con la aplicación de las propiedades de los determinantes para, por ejemplo, "buscar" unos cuantos ceros en el determinante y así facilitar los cálculos. Veamos de nuevo un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 10 & 10 & -3 \\ 0 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & -6 & -14 & 11 \end{vmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} F_2 \equiv F_2 + 2F_1 \\ F_3 \equiv F_3 - 2F_1 \\ F_4 \equiv F_4 - 3F_1 \end{array} \right.$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 10 & -3 \\ -7 & -5 & 1 \\ -6 & -14 & 11 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -7 & -5 & 1 \\ -6 & -14 & 11 \end{vmatrix}$$

$$+0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 10 & 10 & -3 \\ -6 & -14 & 11 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 10 & 10 & -3 \\ -7 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 96$$

Ejemplo 2.8

Calcular el valor de los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 15 & 1 & 14 & 10 \\ 6 & 12 & 7 & -9 \\ 10 & 8 & 11 & -15 \\ 3 & 2 & 2 & 10 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Solución:

(a)
$$\begin{vmatrix} 15 & 1 & 14 & 10 \\ 6 & 12 & 7 & -9 \\ 10 & 8 & 11 & -15 \\ 3 & 2 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 14 & 10 \\ -1 & 12 & 7 & -9 \\ -1 & 8 & 11 & -15 \\ 1 & 2 & 2 & 10 \end{vmatrix} \quad C_1 \equiv C_1 - C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 14 & 10 \\ 0 & 13 & 21 & 1 \\ 0 & 9 & 25 & -5 \\ 0 & 1 & -12 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} F_2 \equiv F_2 + F_1 \\ F_3 \equiv F_3 + F_1 \\ F_4 \equiv F_4 - F_1 \end{cases}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 21 & 1 \\ 9 & 25 & -5 \\ 1 & -12 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 14 & 10 \\ 9 & 25 & -5 \\ 1 & -12 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 14 & 10 \\ 13 & 21 & 1 \\ 1 & -12 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 14 & 10 \\ 13 & 21 & 1 \\ 9 & 25 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 13 \cdot 25 \cdot 0 + 21(-5)1 + 1 \cdot 9(-12)$$
$$-21 \cdot 9 \cdot 0 - 1 \cdot 25 \cdot 1 - 13(-5)(-12)$$
$$= 0 - 105 - 108 - 0 - 25 - 780 = -1018$$

(b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{desarrollando por } C_1$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{desarrollando por } C_1$$

$$= 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{desarrollando por } F_1$$

$$= 6(3 \cdot 2 - 1 \cdot 4) = 6 \cdot 2 = 12$$

------ o ------

2.5. Cálculo de la inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces se verifica que A es una matriz inversible si y sólo si su determinante no es nulo.

La inversa A^{-1} de una matriz inversible A se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}\left(A^t\right)$$

Ejemplo 2.9

Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución:
Comenzamos calculando el determinante de la matriz A.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 4\cdot 2 - 3\cdot 4\cdot 3 - 1\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 2$$

$$= 18 + 6 + 8 - 36 - 3 - 8 = -15 \neq 0$$

Por lo tanto, la matriz A es inversible.

Pasamos a calcular su matriz traspuesta:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la matriz adjunta de esa matriz traspuesta:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2\left(3\cdot 3 - 2\cdot 2\right) = 9 - 4 = 5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3\left(3\cdot 3 - 1\cdot 2\right) = (-1)(9-2) = -7$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4(3\cdot 2 - 1\cdot 3) = 6-3 = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3(4\cdot 3 - 2\cdot 1) = (-1)(12-2) = -10$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4(2\cdot 3 - 1\cdot 1) = 6-1 = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5(2\cdot 2 - 1\cdot 4) = (-1)(4-4) = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4(4\cdot 2 - 3\cdot 1) = 8-3 = 5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5(2\cdot 2 - 3\cdot 1) = (-1)(4-3) = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^6(2\cdot 3 - 3\cdot 4) = 6-12 = -6$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\text{Adj}\left(A^t\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -10 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

y así, como $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\,\text{Adj}\left(A^t\right)$, podemos concluir que

$$A^{-1} = \frac{1}{-15}\begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -10 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{7}{15} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

------ o ------

Ejemplo 2.10

Resolver la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

Nombremos por

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nuestra ecuación matricial queda $RAS = T$. Operando, y siempre que las matrices R^{-1} y S^{-1} existan, nos queda:

$$RAS = T \implies R^{-1}RASS^{-1} = R^{-1}TS^{-1} \implies A = R^{-1}TS^{-1},$$

Comenzamos calculando el determinante de la matriz R.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$$

Por lo tanto, la matriz R es inversible.

Pasamos a calcular su matriz traspuesta:

$$R^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la matriz adjunta de esa matriz traspuesta:

$$R_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2(1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 0 - 1 = -1$$

$$R_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3(1 \cdot 0 - 0 \cdot 1) = (-1)(0 - 0) = 0$$

$$R_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = 1 - 0 = 1$$

$$R_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3(0 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = (-1)(0 - 0) = 0$$

$$R_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4(1 \cdot 0 - 0 \cdot 0) = 0 - 0 = 0$$

$$R_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (-1)(1 - 0) = -1$$

$$R_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4(0 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 0 - 0 = 0$$

$$R_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5(1\cdot 1 - 1\cdot 0) = (-1)(1-0) = -1$$

$$R_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6(1\cdot 1 - 1\cdot 0) = 1 - 0 = 1$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\text{Adj}\left(R^t\right) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y así, como $R^{-1} = \dfrac{1}{|R|}\,\text{Adj}\left(R^t\right)$, podemos concluir que

$$R^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Seguimos calculando el determinante de la matriz S.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 0\cdot 1 = 2 \neq 0$$

Por lo tanto, la matriz S también es inversible.

Pasamos a calcular su matriz traspuesta:

$$S^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la matriz adjunta de esa matriz traspuesta:

$$S_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2(1\cdot 1 - 0\cdot 1) = 1 - 0 = 1$$

$$S_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3(1\cdot 1 - 0\cdot 1) = (-1)(1-0) = -1$$

$$S_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4(1\cdot 0 - 0\cdot 1) = 0 - 0 = 0$$

$$S_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3(0\cdot 1 - 0\cdot 1) = (-1)(0-0) = 0$$

$$S_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4(2\cdot 1 - 0\cdot 1) = 2-0 = 2$$

$$S_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5(2\cdot 0 - 0\cdot 0) = (-1)(0-0) = 0$$

$$S_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4(0\cdot 1 - 1\cdot 1) = 0-1 = -1$$

$$S_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5(2\cdot 1 - 1\cdot 1) = (-1)(2-1) = -1$$

$$S_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6(2\cdot 1 - 1\cdot 0) = 2-0 = 2$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\text{Adj}\left(S^t\right) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y así, como $S^{-1} = \dfrac{1}{|S|}\,\text{Adj}\left(S^t\right)$, podemos concluir que

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A = R^{-1}TS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 6 & -2 & -6 \\ -3 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -6 \\ -3 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

------ o ------

Ejemplo 2.11

Hallar los distintos valores de m *para que la matriz* $B = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *sea inversible.*

Hallar la matriz inversa en el caso $m = 2$.

Solución:

Comenzamos calculando el determinante de la matriz B.

$$\begin{vmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)1 + (-1)1\cdot 1 + 0\cdot 1\cdot 0 - (-1)1\cdot 1 - 0(m-1)1 - m\cdot 1\cdot 0$$

$$= m^2 - m - 1 + 0 + 1 - 0 - 0 = m^2 - m$$

Así,

$$|B| = 0 \iff m^2 - m = 0 \iff m(m-1) = 0 \iff \begin{cases} m = 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow m = 1$$

Por lo tanto, la matriz B es inversible si $m \neq 0$ y $m \neq 1$.

Pasemos a calcular la matriz inversa cuando $m = 2$. La matriz queda $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sabemos que $|B| = \underbrace{m^2 - m}_{m=2} = 2^2 - 2 = 2$.

Por otra parte,

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto,

$$\text{Adj}\left(B^t\right) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y así, como $B^{-1} = \dfrac{1}{|B|}\,\text{Adj}\left(B^t\right)$, podemos concluir que

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

------ o ------

2.6. Rango de una matriz

Sea A una matriz de orden mxn. Se llama menor de orden k, donde k es menor o igual que m y n, al determinante de una matriz cuadrada de orden k que resulta de eliminar $m-k$ filas y $n-k$ columnas de la matriz A.

Se dice que la matriz A es de rango o característica h, cuando en ella existe, por lo menos, un menor de orden h distinto de cero, siendo nulos todos los menores posibles de orden superior a h. En tal caso, todo menor no nulo de orden h se llama menor principal de A.

Si en una matriz una línea (fila o columna) es combinación lineal de las restantes líneas (filas o columnas), entonces el rango de la matriz que resulta al eliminar esa línea es el mismo que el de la matriz inicial.

Dado un menor de una matriz, se pueden formar otros menores de un orden superior con una fila y una columna más, añadiendo los elementos de otra fila y otra columna cualesquiera. Este procedimiento recibe el nombre de orlar el menor.

En la práctica, para calcular el rango de una matriz es preferible iniciar el proceso por un menor de orden 2 no nulo e ir orlándolo progresivamente; si no existiese un menor de orden 2 no nulo, el rango de la matriz sería 1, pues, salvo en el caso de la matriz nula, siempre se puede encontrar un menor de orden 1 no nulo.

Ejemplo 2.12

Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Solución:
La matriz A es de orden 5x4. Por lo tanto, podemos asegurar que rango$(A) \leq 4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ podemos afirmar que rango$(A) \geq 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Además, como $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ podemos afirmar que rango$(A) \geq 3$.

Orlando este último menor de todas las formas posibles obtenemos los siguientes menores de orden 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 6 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

Podemos observar que ambos menores son nulos, ya que, en ambos casos, $C_2 \equiv -2C_1$.

Por lo tanto, podemos concluir que rango$(A) = 3$.

- - - - - - o - - - - - -

Ejemplo 2.13

Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 2 & -1 & k & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ *según los distintos valores de* k.

Solución:

La matriz A es de orden 3x4. Por lo tanto, podemos asegurar que rango$(A) \leq 3$.

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & k & -1 & 2 \\ 2 & -1 & k & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$ podemos afirmar que rango$(A) \geq 2$.

Orlando este menor de todas las formas posibles obtenemos los siguientes menores de orden 3:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & k \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix}}_{a} \quad ; \quad \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix}}_{b}$$

Calculemos el valor de estos dos menores:

$$a = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & k \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 1(-1)(-6) + k \cdot k \cdot 1 + (-1)2 \cdot 10 - k \cdot 2(-6) - (-1)(-1)1 - 1 \cdot k \cdot 10$$

$$= 6 + k^2 - 20 + 12k - 1 - 10k = k^2 + 2k - 15$$

$$b = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)1 + k \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 10 - k \cdot 2 \cdot 1 - 2(-1)1 - 1 \cdot 5 \cdot 10$$

$$= -1 + 5k + 40 - 2k + 2 - 50 = 3k - 9$$

Observemos que se tiene que

$$a = 0 \iff k^2 + 2k - 15 = 0 \iff k = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$\iff \begin{cases} k = \dfrac{-2+8}{2} = 3 \\ k = \dfrac{-2-8}{2} = -5 \end{cases}$$

$$b = 0 \iff 3k - 9 = 0 \iff k = \frac{9}{3} = 3$$

Resumiendo:

- Si $k = 3$ se tiene que $a = 0$; $b = 0$.
- Si $k = -5$ se tiene que $a = 0$; $b \neq 0$.
- Si $k \neq 3$ y $k \neq -5$ se tiene que $a \neq 0$; $b \neq 0$.

Por lo tanto, podemos concluir que $\begin{cases} \text{si } k = 3 \implies \text{rango}(A) = 2 \\ \\ \text{si } k \neq 3 \implies \text{rango}(A) = 3 \end{cases}$

------ o ------

Matemáticas. Segundo de Bachillerato. I.E.S. Los Boliches. Departamento de Matemáticas

Relación 2. Determinantes

1. Calcular el valor de los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 33 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 373 & 141 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 10 & 497 & 1533 \\ 0 & 10 & 8931 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 6 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

2. Razónese la igualdad correspondiente usando las propiedades de los determinantes (¡no vale desarrollarlos!):

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 12 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$

(c) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+c}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$ (d) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 x & \cos(2x) & \cos^2 x \\ \operatorname{sen}^2 y & \cos(2y) & \cos^2 y \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (f) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} x & 1 & -x & 1 \\ y & 2 & -y & 0 \\ z & 3 & -z & 0 \\ t & 4 & -t & 0 \end{vmatrix} = 0$ (h) $\begin{vmatrix} 1 & x & a & p \\ 1 & y & b & p \\ 1 & z & c & r \\ 1 & t & d & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & q & r & s \\ a & b & c & d \\ x & y & z & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3. Resolver las ecuaciones:

(a) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ 2 & x-1 & 2 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix} = 0$

(c) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = 0$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -2 \\ 8 & x^3 & -8 \end{vmatrix} = 0$

4. Hallar la matriz inversa de cada una de las siguientes:

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

5. Resolver las ecuaciones matriciales:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

6. Comprueba sin desarrollar que el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 17.

7. Demostrar sin desarrollar que $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$

8. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ hallar A^{-2}.

9. Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 10 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

10. Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ k & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ según los distintos valores de k.

12. Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 13 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 10 & 1 & k \end{pmatrix}$ según los distintos valores de k.

13. Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ según los distintos valores de m.

14. Sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

razonar cuáles de las matrices A, B, C y AB tienen matriz inversa y en los casos en que la respuesta sea afirmativa, hallar la correspondiente matriz inversa.

15. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 3 \\ 4 & 1 & -b \end{pmatrix}$ determinar para qué valores del parámetro b existe A^{-1}. Calcular A^{-1} para $b = 2$.

16. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ hallar $\left(A^t A^{-1}\right)^2 A$.

17. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$ determinar para qué valores de x existe A^{-1}. Calcular dicha matriz inversa.

18. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y que $AX = X - B$, hallar X.

19. Sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Razonar si la matriz A tiene matriz inversa y en caso afirmativo hallar la correspondiente matriz inversa.

(b) Determinar la matriz X que cumple que $AX + CB^t = BB^t$.

20. Sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

resolver $AB^tX = -2C$.

21. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ calcular, en función de a, los determinantes de $2A$ y A^t.

22. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

(a) Determinar la matriz $B = A^2 - 2A$.

(b) Determinar los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.

(c) Calcular B^{-1} para $\lambda = 1$.

23. Se sabe que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$. Calcular, indicando las propiedades que se utilicen, los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 3\,a_{11} & 3\,a_{12} & 15\,a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5\,a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5\,a_{33} \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 3\,a_{21} & 3\,a_{22} & 3\,a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{31} & a_{22} - a_{32} & a_{23} - a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

<u>Soluciones</u>

1. (a) 17 (b) 0 (c) $ad-cb$ (d) $a^2b^2(b-a)$ (e) 0 (f) 0 (g) 1000 (h) 5 (i) 48

3. (a) $x = -2$; $x = 3$ (b) $x = 0$; $x = \dfrac{1}{2}$ (c) $x = -\dfrac{abc}{ab + ac + bc}$ (d) $x = 2$

4. (a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ -\operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{22} & \frac{21}{88} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{22} & \frac{3}{88} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{44} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$

5. (a) $\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 2 \\ \frac{26}{3} & -3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & -2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

9. 2

10. 3

11. Si $k = 0$; rango$(A) = 2$. Si $k \neq 0$; rango$(A) = 3$.

12. Si $k = 0$; rango$(A) = 2$. Si $k \neq 0$; rango$(A) = 3$.

13. Si $m = \dfrac{7}{9}$; rango$(A) = 2$. Si $m \neq \dfrac{7}{9}$; rango$(A) = 3$.

14. Sólo tiene inversa la matriz AB. $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. $b \neq 1$ y $b \neq 3$. Si $b = 2 \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

17. Para todo x. Además se tiene $A^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

19. (a) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{26}{7} \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -1 \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

21. $|2A| = -4a^2$; $\left|A^t\right| = -a^2$

22. (a) $\begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{pmatrix}$ (b) $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq -1$ (c) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

23. (a) -30 (b) 6 (c) -2