Criterios topológicos en la evaluación y promoción del alumnado en Secundaria

M. T. Dávila E. M. Fedriani R. Moyano

I. E. S. Antonio Machado (Sevilla)

Dpto. de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica

I. E. S. Miguel de Cervantes (Sevilla)

Introducción

Educación:

- Necesidad de analizar y evaluar
- Intervienen muchas variables (fenómeno multivariante)
- Aparecen subdivisiones de las unidades de análisis

Introducción

Educación:

- Necesidad de analizar y evaluar
- Intervienen muchas variables (fenómeno multivariante)
- Aparecen subdivisiones de las unidades de análisis

Estudio de fenómenos multivariantes:

- De forma estadística
- Usando herramientas topológicas (nuevo)

Introducción

Estudio de fenómenos multivariantes:

- Economía y Empresa (Kaufmann, Gil-Aluja, 1995)
- Estudio económico de la pobreza (Martín, Mínguez, 2005)
- Análisis Input-Output (Fedriani, Tenorio, 2006)
- Estudio económico del turismo (Ballesteros, Hernández, Fedriani, 2008)

Introducción

Estudio de fenómenos multivariantes:

- Economía y Empresa (Kaufmann, Gil-Aluja, 1995)
- Estudio económico de la pobreza (Martín, Mínguez, 2005)
- Análisis Input-Output (Fedriani, Tenorio, 2006)
- Estudio económico del turismo (Ballesteros, Hernández, Fedriani, 2008)

Nuestra propuesta: APLICACIONES EN EDUCACIÓN

Un caso concreto

Objetivo: Estudiar la homogeneidad en cuanto a competencia matemática de los alumnos de dos centros de secundaria en Andalucía

Un caso concreto

Objetivo: Estudiar la homogeneidad en cuanto a competencia matemática de los alumnos de dos centros de secundaria en Andalucía

Datos:

- CENTRO 1: Grupos $3A$, $3B$, $3C$, $3D$
- CENTRO 2: Grupos $3A'$, $3B'$, $3C'$, $3D'$, Div_1, Div_2
- Competencia matemática: Pruebas de Diagnóstico en Matemáticas llevadas a cabo por la Junta de Andalucía. Curso 2007/08 (muestra censal)

Indicador Topológico de Intensidad

Elementos:

- Universo U

Indicador Topológico de Intensidad

Elementos:

- Universo U
- Unidades de Analisis: una partición finita $\{C_1, ..., C_n\}$ de U (i.e. $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = U$, $C_i \cap C_j = \emptyset$, $i \neq j$)

Indicador Topológico de Intensidad

Elementos:

- Universo U
- Unidades de Analisis: una partición finita $\{C_1, ..., C_n\}$ de U (i.e. $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = U$, $C_i \cap C_j = \emptyset$, $i \neq j$)
- Componentes: particiones finitas de cada unidad de análisis.

Indicador Topológico de Intensidad

Elementos:

- Universo U
- Unidades de Analisis: una partición finita $\{C_1, ..., C_n\}$ de U (i.e. $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = U$, $C_i \cap C_j = \emptyset$, $i \neq j$)
- Componentes: particiones finitas de cada unidad de análisis.
- Variables: X_1, X_2,... ,X_k

Indicador Topológico de Intensidad

Elementos:

- Universo U
- Unidades de Analisis: una partición finita $\{C_1, ..., C_n\}$ de U (i.e. $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = U$, $C_i \cap C_j = \emptyset$, $i \neq j$)
- Componentes: particiones finitas de cada unidad de análisis.
- Variables: X_1, X_2,... ,X_k
- Umbrales: para la variable X_k es $\mu_k \in \mathbb{R}$.

Indicador Topológico de Intensidad

Grafo asociado bipartito G_C a una unidad de análisis C: Sean $\{C_1, ..., C_p\}$ las componentes de C. Entonces:

- $V(G_C) = \{C_1, ..., C_p\} \cup \{X_1, ..., X_k\}$
- $E(G_C) = \{\{C_i, X_j\} | X_j(C_i) < \mu_i\}$

Indicador Topológico de Intensidad

Grafo asociado bipartito G_C a una unidad de análisis C: Sean $\{C_1, ..., C_p\}$ las componentes de C. Entonces:

- $V(G_C) = \{C_1, ..., C_p\} \cup \{X_1, ..., X_k\}$
- $E(G_C) = \{\{C_i, X_j\} | X_j(C_i) < \mu_i\}$

Indicador Topológico de Intensidad:

$$ITI(C) = \frac{\#(E(G_C))}{p}$$

Indicador Topológico de Intensidad

Grafo asociado bipartito G_C a una unidad de análisis C: Sean $\{C_1, ..., C_p\}$ las componentes de C. Entonces:

- $V(G_C) = \{C_1, ..., C_p\} \cup \{X_1, ..., X_k\}$
- $E(G_C) = \{\{C_i, X_j\} | X_j(C_i) < \mu_i\}$

Indicador Topológico de Intensidad:

$$ITI(C) = \frac{\#(E(G_C))}{p}$$

Propiedad: $0 \leq ITI(C) \leq k$

Indicador Topológico de Intensidad

Indicador Topológico de Intensidad parcial respecto de X_j:

$$ITI_{X_j}(C) = \frac{\delta(X_j)}{p}$$

Indicador Topológico de Intensidad

Indicador Topológico de Intensidad parcial respecto de X_j:

$$ITI_{X_j}(C) = \frac{\delta(X_j)}{p}$$

Propiedad: $0 \leq ITI_{X_j}(C) \leq 1$

Indicador Topológico de Intensidad

Indicador Topológico de Intensidad parcial respecto de X_j:

$$ITI_{X_j}(C) = \frac{\delta(X_j)}{p}$$

Propiedad: $0 \leq ITI_{X_j}(C) \leq 1$

Interpretación práctica:

- $ITI(C) \approx k$ competencia matemática baja en general
- $ITI(C) \approx 0$ competencia matemática alta en general
- $ITI_{X_j}(C) \approx 1$ competencia matemática baja con respecto a X_j
- $ITI_{X_j}(C) \approx 0$ competencia matemática alta con respecto a X_j

Indicador Topológico de Intensidad

Elementos de nuestro estudio:

- Universo $U = \{\text{CENTRO 1}, \text{CENTRO 2}\}$
- Unidades de Análisis: C_1 es el CENTRO 1, C_2 es el CENTRO 2.
- Componentes: $C_1 = \{3A, 3B, 3C, 3D\}$, $C_2 = \{3A', 3B', 3C', 3D', Div_1, Div_2\}$
- Variables: O:*organizar, comprender e interpretar información*, E:*expresión matemática*, P:*plantear y resolver problemas* $(O, E, P \in \{1, ..., 6\})$
- Umbrales: Media en U, $\mu_O = 4$, $\mu_E = 3$, $\mu_P = 4$.

Indicador Topológico de Intensidad

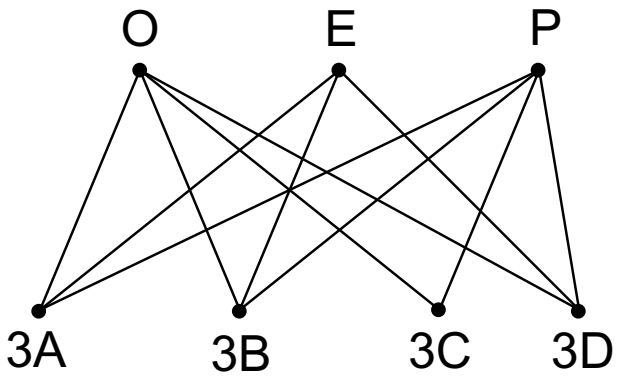
	3A	3B	3C	3D
O	5	4	5	5
E	3	3	2	3
P	4	5	4	4

	3A'	3B'	3C'	3D'	Div_1	Div_2
O	4	4	4	5	3	4
E	3	3	3	4	2	3
P	3	4	4	5	2	3

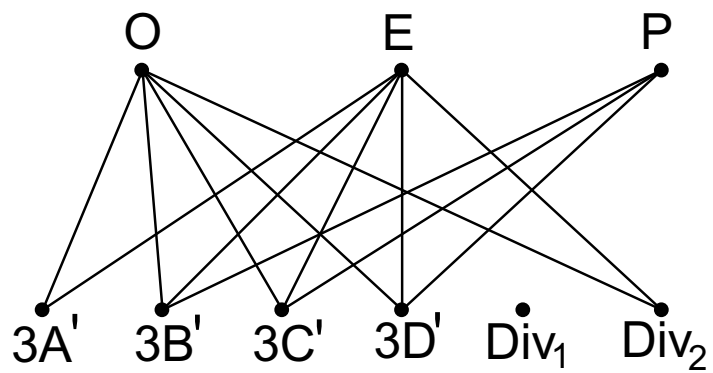
Indicador Topológico de Intensidad

	3A	3B	3C	3D
O	5	4	5	5
E	3	3	2	3
P	4	5	4	4

	3A’	3B’	3C’	3D’	Div_1	Div_2
O	4	4	4	5	3	4
E	3	3	3	4	2	3
P	3	4	4	5	2	3



Center C_1



Center C_2

Indicador Topológico de Intensidad

Valores obtenidos de ITIs:

Unit	ITI_O	ITI_E	ITI_P	ITI
C_1	$\frac{4}{4} = 1{,}000$	$\frac{3}{4} = 0{,}750$	$\frac{4}{4} = 1{,}000$	$2{,}750$
C_2	$\frac{5}{6} = 0{,}835$	$\frac{5}{6} = 0{,}835$	$\frac{3}{6} = 0{,}500$	$2{,}170$

Indicador Topológico de Intensidad

Valores obtenidos de ITIs:

Unit	ITI_O	ITI_E	ITI_P	ITI
C_1	$\frac{4}{4} = 1{,}000$	$\frac{3}{4} = 0{,}750$	$\frac{4}{4} = 1{,}000$	$2{,}750$
C_2	$\frac{5}{6} = 0{,}835$	$\frac{5}{6} = 0{,}835$	$\frac{3}{6} = 0{,}500$	$2{,}170$

Unit	ITI_O	ITI_E	ITI_P	ITI
C_1	100 %	75 %	100 %	91.67 %
C_2	83.5 %	83.5 %	50 %	72.23 %

Indicador Topológico de Intensidad

Valores obtenidos de ITIs:

Unit	ITI_O	ITI_E	ITI_P	ITI
C_1	$\frac{4}{4} = 1{,}000$	$\frac{3}{4} = 0{,}750$	$\frac{4}{4} = 1{,}000$	$2{,}750$
C_2	$\frac{5}{6} = 0{,}835$	$\frac{5}{6} = 0{,}835$	$\frac{3}{6} = 0{,}500$	$2{,}170$

Unit	ITI_O	ITI_E	ITI_P	ITI
C_1	100 %	75 %	100 %	91.67 %
C_2	83.5 %	83.5 %	50 %	72.23 %

Orden inducido por los ITIs: $C_2 \prec C_1$, $C_1 \prec_E C_2$, $C_2 \prec_{O,P} C_1$

Indicador Topológico de Desigualdad

Multidigrafo (digrafo con aristas múltiples) $G(C)$ asociado a la unidad de análisis C: Sean $\{C_1, ..., C_p\}$ las componentes de C. Entonces:

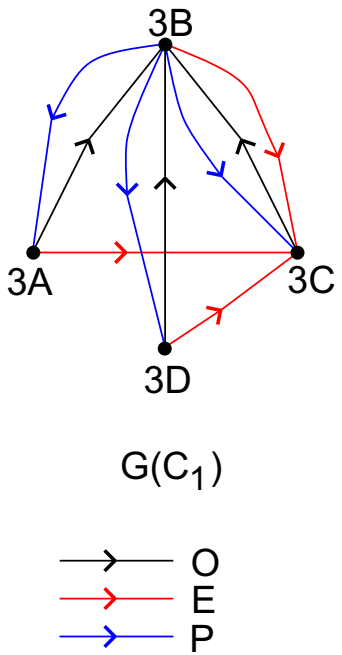
- $V(G_C) = \{C_1, ..., C_p\}$
- $E(G_C) = \{(C_i, C_j) | \exists X_k \text{such that} X_k(C_i) \geq X_k(C_j)\}$

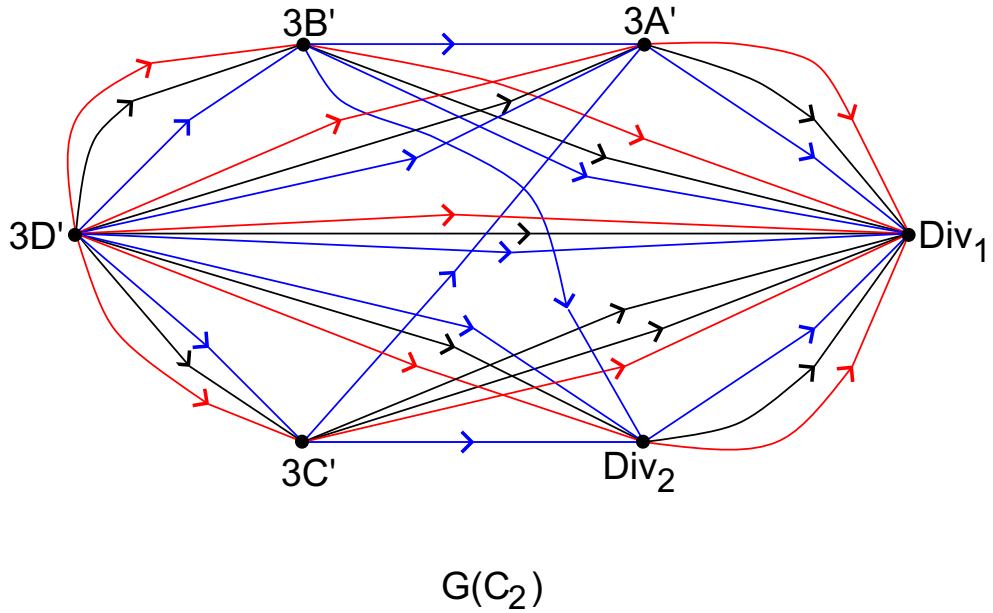
Indicador Topológico de Desigualdad

Multidigrafo (digrafo con aristas múltiples) $G(C)$ asociado a la unidad de análisis C: Sean $\{C_1, ..., C_p\}$ las componentes de C. Entonces:

- $V(G_C) = \{C_1, ..., C_p\}$
- $E(G_C) = \{(C_i, C_j) | \exists X_k \text{such that} X_k(C_i) \geq X_k(C_j)\}$

Multidigrafos asociados a C_1 y C_2:





Indicador Topológico de Desigualdad

Niveles de competencia:

- *Matriz de adyacencias de* $G(C)$: $M(C) = (m_{ij})$ donde m_{ij} es el número de aristas de C_i a C_j

Indicador Topológico de Desigualdad

Niveles de competencia:

- *Matriz de adyacencias de* $G(C)$: $M(C) = (m_{ij})$ donde m_{ij} es el número de aristas de C_i a C_j
- *Cierre transitivo de* $G(C)$: Grafo cuya matriz de adyacencias $\hat{M}(C)$ es la suma booleana de las potencias booleanas de $M(C)$

Indicador Topológico de Desigualdad

Niveles de competencia:

- *Matriz de adyacencias de* $G(C)$: $M(C) = (m_{ij})$ donde m_{ij} es el número de aristas de C_i a C_j
- *Cierre transitivo de* $G(C)$: Grafo cuya matriz de adyacencias $\hat{M}(C)$ es la suma booleana de las potencias booleanas de $M(C)$
- *Grafo fuertemente conexo*: Cualesquiera dos vértices distintos están conectados por un camino

Indicador Topológico de Desigualdad

Niveles de competencia:

- *Matriz de adyacencias de* $G(C)$: $M(C) = (m_{ij})$ donde m_{ij} es el número de aristas de C_i a C_j
- *Cierre transitivo de* $G(C)$: Grafo cuya matriz de adyacencias $\hat{M}(C)$ es la suma booleana de las potencias booleanas de $M(C)$
- *Grafo fuertemente conexo*: Cualesquiera dos vértices distintos están conectados por un camino
- *Subgrafo fuertemente conexo maximal*: Un subgrafo fuertemente conexo que no está contenido estrictamente en ningún otro subgrafo conexo maximal

Indicador Topológico de Desigualdad

Algunos resultados:

- El subgrafo fuertemente conexo maximal que contiene el vértice C_i es $S(C_i) = (\hat{\Gamma}(C_i) \cap \hat{\Gamma}^{-1}(C_i)) \cup \{C_i\}$.
- Un grafo G es fuertemente conexo si y solo si todo elemento de $\hat{M}(G)$ es 1.

Indicador Topológico de Desigualdad

Algunos resultados:

- El subgrafo fuertemente conexo maximal que contiene el vértice C_i es $S(C_i) = (\hat{\Gamma}(C_i) \cap \hat{\Gamma}^{-1}(C_i)) \cup \{C_i\}$.
- Un grafo G es fuertemente conexo si y solo si todo elemento de $\hat{M}(G)$ es 1.

Notación: $\hat{\Gamma}(C_i) = \{C_j | \hat{m}_{ij} = 1\}$, $\hat{\Gamma}^{-1}(C_i) = \{C_j | \hat{m}_{ji} = 1\}$

Indicador Topológico de Desigualdad

Algunos resultados:

- El subgrafo fuertemente conexo maximal que contiene el vértice C_i es $S(C_i) = (\hat{\Gamma}(C_i) \cap \hat{\Gamma}^{-1}(C_i)) \cup \{C_i\}$.
- Un grafo G es fuertemente conexo si y solo si todo elemento de $\hat{M}(G)$ es 1.

Notación: $\hat{\Gamma}(C_i) = \{C_j | \hat{m}_{ij} = 1\}$, $\hat{\Gamma}^{-1}(C_i) = \{C_j | \hat{m}_{ji} = 1\}$

Interpretación práctica: Se asume que las componentes en un mismo subgrafo fuertemente conexo maximal presentan un nivel similar de competencia matemática.

Indicador Topológico de Desigualdad

Las matrices de adyacencias asociadas a los multidigrafos $G(C_1)$ y $G(C_2)$

$$M(C_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M(C_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Indicador Topológico de Desigualdad

Las matrices de adyacencias asociadas a los multidigrafos $G(C_1)$ y $G(C_2)$

$$M(C_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M(C_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices de los cierres transitivos de $G(C_1)$ y $G(C_2)$:

$$\hat{M}(C_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{M}(C_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Indicador Topológico de Desigualdad

Capas: $N_k \subset G_C$ tal que:

- $\{N_k\}_k$ es una partición de $V(G_C)$.
- $\{N_k\}_k$ puede ser totalmente ordenado.

Indicador Topológico de Desigualdad

Capas: $N_k \subset G_C$ tal que:

- $\{N_k\}_k$ es una partición de $V(G_C)$.
- $\{N_k\}_k$ puede ser totalmente ordenado.

Algoritmo para obtener N_k:

- G'_C se obtiene contrayendo a un vértice cada subgrafo fuertemente conexo maximal.
- $N'_0 = \{V \in G' | \hat{\Gamma}^{-1}(V) = \emptyset\}$.
  $N'_1 = \{V \in G' - N'_0 | \hat{\Gamma}^{-1}(V) = \emptyset\}$.
  $N'_2 = \{V \in G' - (N'_0 \cup N'_1) | \hat{\Gamma}^{-1}(V) = \emptyset\}$, y así sucesivamente.
- N_k es el conjunto de vértices de G de todo subgrafo fuertemente conexo maximal contraído a un punto de N'_k en G'

Indicador Topológico de Desigualdad

Interpretación práctica: Se asume que las componentes en una misma capa presentan un nivel similar de competencia matemática.

Indicador Topológico de Desigualdad

Interpretación práctica: Se asume que las componentes en una misma capa presentan un nivel similar de competencia matemática.

En nuestro caso práctico:

- Subgrafos fuertemente conexos maximales de $G(C_1)$: $G(C_1)$
- Subgrafos fuertemente conexos maximales de $G(C_2)$: $\{3A'\}$, $\{3B'\}$, $\{3C'\}$, $\{3D'\}$, $\{Div_1\}$ y $\{Div_2\}$
- Capas de $G(C_1)$: $N_0 = G(C_1)$
- Capas de $G(C_2)$: $N_0 = \{3D'\}$, $N_1 = \{3B', 3C'\}$, $N_2 = \{3A', Div_2\}$ y $N_3 = \{Div_1\}$

Indicador Topológico de Desigualdad

Interpretación práctica: Se asume que las componentes en una misma capa presentan un nivel similar de competencia matemática.

En nuestro caso práctico:

- Subgrafos fuertemente conexos maximales de $G(C_1)$: $G(C_1)$
- Subgrafos fuertemente conexos maximales de $G(C_2)$: $\{3A'\}$, $\{3B'\}$, $\{3C'\}$, $\{3D'\}$, $\{Div_1\}$ y $\{Div_2\}$
- Capas de $G(C_1)$: $N_0 = G(C_1)$
- Capas de $G(C_2)$: $N_0 = \{3D'\}$, $N_1 = \{3B', 3C'\}$, $N_2 = \{3A', Div_2\}$ y $N_3 = \{Div_1\}$

Orden inducido en C_2:

$\{3D'\} \prec \{3B', 3C'\} \prec \{3A', Div_2\} \prec \{Div_1\}$

Indicador Topológico de Desigualdad

Conclusiones prácticas: Unidad C_1: Todos los grupos de 3º de ESO en el CENTRO 1 presentan un nivel similar de competencia matemática.

Indicador Topológico de Desigualdad

Conclusiones prácticas: Unidad C_1: Todos los grupos de 3º de ESO en el CENTRO 1 presentan un nivel similar de competencia matemática.

Conclusiones prácticas: Unidad C_2: Se observan cuatro diferentes niveles; el grupo $3D'$ es el más avanzado, Div_1 es el que presenta más difi cultades mientras que $3A'$ y Div_2 tienen niveles similares (inesperado a priori).

Indicador Topológico de Desigualdad

Definición: $DTI(G) = \dfrac{k}{\#V(G)}$, donde k es el número de capas.

Indicador Topológico de Desigualdad

Defi nición: $DTI(G) = \dfrac{k}{\#V(G)}$, donde k es el número de capas.

Propiedad: $DTI(G) \in (0, 1]$

Indicador Topológico de Desigualdad

Definición: $DTI(G) = \dfrac{k}{\#V(G)}$, donde k es el número de capas.

Propiedad: $DTI(G) \in (0, 1]$

Significado práctico: Cuanto más cercano a 0 es el índice, mayor grado de homogeneidad presenta la unidad de análisis

Indicador Topológico de Desigualdad

Definición: $DTI(G) = \dfrac{k}{\#V(G)}$, donde k es el número de capas.

Propiedad: $DTI(G) \in (0, 1]$

Significado práctico: Cuanto más cercano a 0 es el índice, mayor grado de homogeneidad presenta la unidad de análisis

En nuestro caso: $DTI(G(C_1)) = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$, $DTI(G(C_2)) = \dfrac{4}{6} \approx 0{,}67$. Luego C_1 presenta un mayor grado de homogeneidad

NOTA: ITIs, DTI, el cálculo de grafos bipartitos y multidigrafos asociados así como el algoritmo para definir las capas han sido implementados en Maxima con éxito

Indicador Topológico de Desigualdad

Definición: $DTI(G) = \dfrac{k}{\#V(G)}$, donde k es el número de capas.

Propiedad: $DTI(G) \in (0, 1]$

Significado práctico: Cuanto más cercano a 0 es el índice, mayor grado de homogeneidad presenta la unidad de análisis

En nuestro caso: $DTI(G(C_1)) = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$, $DTI(G(C_2)) = \dfrac{4}{6} \approx 0{,}67$. Luego C_1 presenta un mayor grado de homogeneidad

NOTA: ITIs, DTI, el cálculo de grafos bipartitos y multidigrafos asociados así como el algoritmo para definir las capas han sido implementados en Maxima con éxito