

Tema 2

Determinantes

Contenidos

- Determinantes de orden 2
- Determinantes de orden 3
- Propiedades de los determinantes
- Determinantes de orden n
- Cálculo de la inversa de una matriz
- Rango de una matriz



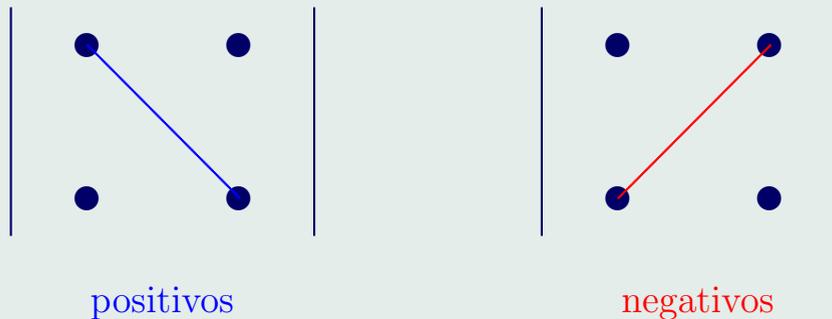
2.1. Determinantes de orden 2

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de orden 2. Se llama **determinante** de la matriz A y se denota por $\det(A)$ ó $|A|$ a la expresión $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Por ejemplo se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 4 + 6 = 10$$

Esta expresión se puede recordar fácilmente con el siguiente esquema:





2.2. Determinantes de orden 3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matriz de orden 3. Se llama **determinante** de la matriz A y se denota por $\det(A)$ ó $|A|$ a la expresión

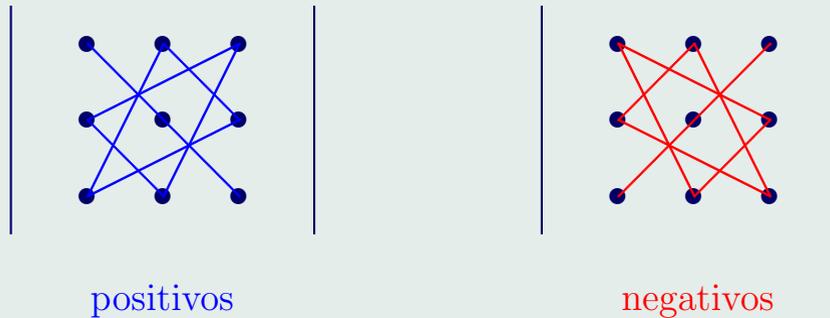
$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Por ejemplo se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) \cdot 3 - 4 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-1)$$
$$= 12 + 6 + 8 + 18 - 16 + 2 = 30$$



Esta expresión se puede recordar fácilmente con el siguiente esquema, conocido por la [regla de Sarrus](#):



De forma similar se define el determinante de las matrices de orden 4, 5, etc., pero dada su complejidad (en orden 4 salen 24 sumandos y en orden 5 salen 120 sumandos), existen otros procedimientos que pasaremos a detallar posteriormente.



2.3. Propiedades de los determinantes

- El determinante de una matriz A coincide con el determinante de su matriz traspuesta A^t , es decir, $|A| = |A^t|$.
- El determinante de un producto de dos matrices A y B coincide con el producto de los determinantes de las dos matrices, es decir, $|AB| = |A| \cdot |B|$.
- Si se permutan entre sí dos líneas (columnas o filas), el determinante cambia de signo. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

ya que hemos intercambiado la fila primera con la fila tercera.

- Si dos líneas (filas o columnas) son idénticas, el determinante vale 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ya que las columnas primera y tercera son iguales.



- Si todos los elementos de una línea (fila o columna) son ceros, el determinante vale 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ya que los elementos de la fila segunda son todos ceros.

- Si todos los elementos de una línea (fila o columna) contienen un factor común, este factor común puede sacarse fuera del determinante. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -9 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

ya que la fila segunda tenía como factor común el número 3.

- Si dos líneas (filas o columnas) son proporcionales, el valor del determinante es 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -9 & 6 & -18 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ya que la tercera columna es el doble que la primera ($C_3 \equiv 2C_1$).



- Si los elementos de cualquier línea (fila o columna) son sumas de igual número de términos, entonces el determinante es suma de tantos determinantes como sumandos figuren en la línea, en la que todas las líneas permanecen inalteradas salvo la que está formada por sumandos, que será reemplazada por el primer sumando en el primer determinante, por el segundo sumando en el segundo determinante, y así sucesivamente. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} a + b & c + d \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ e & f \end{vmatrix}$$



- El valor de un determinante no varía si a los elementos de una línea (fila o columna) se le suman los correspondientes de otra paralela multiplicados por un número real k . Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

ya que a la tercera fila se le ha sumado el doble de la primera (se ha sustituido la F_3 por $F_3 + 2F_1$).

De forma más general, si a una línea (fila o columna) se le suma una combinación lineal de las restantes líneas (filas o columnas), el determinante no varía. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 14 & 21 \end{vmatrix}$$

ya que a la tercera fila se le ha sumado el doble de la primera y el triple de la segunda (se ha sustituido la F_3 por $F_3 + 2F_1 + 3F_2$).



- Si una línea (fila o columna) es combinación lineal de las restantes líneas (filas o columnas), el determinante vale 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

ya que la tercera columna es la segunda columna menos dos veces la primera ($C_3 \equiv C_2 - 2C_1$).



2.4. Determinantes de orden n

Menor complementario de un elemento de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n y sea a_{ij} uno de sus elementos. Si se suprime en A la fila i y la columna j se obtiene una submatriz cuadrada de orden $n - 1$ que recibe el nombre de **submatriz complementaria del elemento** a_{ij} . Al determinante de esta submatriz se le llama **menor complementario del elemento** a_{ij} y se representa por α_{ij} .



Adjunto de un elemento de una matriz

Por otra parte, se llama **adjunto del elemento** a_{ij} y se representa por A_{ij} al menor complementario de a_{ij} precedido del signo $+$ ó $-$ según que $i + j$ sea par o impar. Es decir,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$$

Por ejemplo, dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, la submatriz complementaria del elemento

a_{12} es la matriz $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ y, por lo tanto, su menor complementario α_{12} es

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot 9 - 0 \cdot (-3) = 63$$

Por otra parte, como $1 + 2 = 3$, su adjunto A_{12} será $(-1)^3 \cdot 63 = -63$.



Matriz adjunta de una matriz

Sea A una matriz. Se llama **matriz adjunta** de A , y se representa por $\text{Adj}(A)$, a la matriz que resulta de sustituir cada uno de los elementos de la matriz A por su adjunto. Es decir, si por

ejemplo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.



Cálculo práctico de determinantes de orden n

El determinante de una matriz A cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) cualquiera por sus adjuntos respectivos. Es decir, tomando por ejemplo la fila i , se obtiene

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

Este resultado es de vital importancia para el cálculo de determinantes de orden 4 o mayor. Por ejemplo, un determinante de orden 4 se puede convertir en 4 determinantes de orden 3. Veamos un ejemplo. Desarrollando por la primera fila se tiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} -$$
$$-(-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 21 - 3(-30) + 4(-25) + 2 \cdot 28 = 21 + 90 - 100 + 56 = 67$$



Además, se puede combinar esta técnica con la aplicación de las propiedades de los determinantes para, por ejemplo, “buscar” unos cuantos ceros en el determinante y así facilitar los cálculos. Veamos de nuevo un ejemplo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 10 & 10 & -3 \\ 0 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & -6 & -14 & 11 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} F_2 \equiv F_2 + 2F_1 \\ F_3 \equiv F_3 - 2F_1 \\ F_4 \equiv F_4 - 3F_1 \end{cases} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 10 & -3 \\ -7 & -5 & 1 \\ -6 & -14 & 11 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -7 & -5 & 1 \\ -6 & -14 & 11 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 10 & 10 & -3 \\ -6 & -14 & 11 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 10 & 10 & -3 \\ -7 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 96 \end{aligned}$$



2.5. Cálculo de la inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n . Entonces se verifica que A es una matriz inversible si y sólo si su determinante no es nulo.

La inversa A^{-1} de una matriz inversible A se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t)$$



2.6. Rango de una matriz

Sea A una matriz de orden $m \times n$. Se llama **menor** de orden k , donde k es menor o igual que m y n , al determinante de una matriz cuadrada de orden k que resulta de eliminar $m - k$ filas y $n - k$ columnas de la matriz A .

Se dice que la matriz A es de **rango** o **característica** h , cuando en ella existe, por lo menos, un menor de orden h distinto de cero, siendo nulos todos los menores posibles de orden superior a h . En tal caso, todo menor no nulo de orden h se llama **menor principal** de A .

Si en una matriz una línea (fila o columna) es combinación lineal de las restantes líneas (filas o columnas), entonces el rango de la matriz que resulta al eliminar esa línea es el mismo que el de la matriz inicial.

Dado un menor de una matriz, se pueden formar otros menores de un orden superior con una fila y una columna más, añadiendo los elementos de otra fila y otra columna cualesquiera. Este procedimiento recibe el nombre de **orlar el menor**.

En la práctica, para calcular el rango de una matriz es preferible iniciar el proceso por un menor de orden 2 no nulo e ir orlándolo progresivamente; si no existiese un menor de orden 2 no nulo, el rango de la matriz sería 1, pues, salvo en el caso de la matriz nula, siempre se puede encontrar un menor de orden 1 no nulo.