

Construction of mathematical knowledge using graphic calculators (TI-84 plus & CAS) in the mathematics classroom

Département de Mathématiques et Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation

Université du Québec à Montréal & Université de Genève
Canada & Switzerland

ferhitt@yahoo.com

Lecture Proposal for the ACDCA strand
Lecture Proposal for the TI-Nspire & Derive Strand

ABSTRACT

Mathematics education researchers are asking themselves about why technology has impacted heavily on the social environment and not in the mathematics classroom. The use of technology in the mathematics classroom has not had the expected impact, as it has been its use in everyday life (f.e. cell phone). What about teachers' opinion? Mathematics teachers can be divided into three categories: Those with a boundless overflow (enthusiasm) that want to use the technology without worrying much about the construction of mathematical concepts, those who reject outright the use of technology because they think that their use inhibits the development of mathematical skills, and others that reflect on the balance that must exist between paper-pencil activities and use of technology. The mathematics teacher not having clear examples that support this last option about the balance of paper-pencil activities and technology, opt for one of the extreme positions outlined above. In this paper, we show the results of research on a methodology based on collaborative learning (ACODESA) in the training of mathematics teachers in secondary schools and implementation of activities in an environment of paper-pencil and CAS in the mathematics classroom. We note also that with the development of technology on the use of electronic tablets and interactive whiteboards, these activities will take on greater momentum in the near future.

RESUMEN

Los investigadores en educación matemática se preguntan por qué la tecnología ha impactado fuertemente en el medio social y no en el aula de matemáticas. El uso de la tecnología en el aula de matemáticas no ha tenido el impacto esperado como lo ha sido su uso en la vida corriente. ¿Cuál es la posición de los profesores? Los profesores de matemáticas se pueden dividir en tres tipos de categorías, aquellos que con un desbordamiento desmedido quieren utilizar la tecnología sin preocuparse mucho sobre la construcción de conceptos, aquellos que rechazan

completamente el uso de tecnología porque piensan que su uso inhibe el desarrollo de habilidades matemáticas, y otros que reflexionan sobre el equilibrio que debe de haber entre actividades en papel-lápiz y uso de tecnología. El profesor de matemáticas al no contar con ejemplos claros que soporten esta última opción sobre el equilibrio en las actividades de papel-lápiz y tecnología, opta por alguno de los extremos antes señalados. En este documento, queremos mostrar los resultados de investigación sobre una metodología basada en el aprendizaje en colaboración (ACODESA) en la formación de profesores de matemáticas en la escuela secundaria e implementación de actividades en ambientes de papel-lápiz y calculadora (CAS) en el aula de matemáticas. Queremos señalar también, que con el desarrollo de la tecnología sobre el uso de tabletas electrónicas y pizarrones interactivos, este tipo de actividades cobrarán un impulso mayor en un futuro inmediato.

Introducción

El uso de la tecnología en el aula de matemáticas, por una u otra razón, no ha logrado permear el aula de matemáticas. Y ello, teniendo en cuenta que las autoridades educativas están conscientes de la importancia de utilizar tecnología en el aula. Por ejemplo, en Québec, el Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS, 1996) proclama la importancia de su uso en el aula de matemáticas; Sin embargo, es notoria la ingenuidad como la presentan al profesor de matemáticas, e incluso peligrosa.

Debido a que la tecnología influye en las matemáticas y su uso, es necesario que el estudiante controle los instrumentos electrónicos modernos, como la calculadora científica...

La tecnología no garantiza el éxito del estudiante en matemáticas, las calculadoras y las computadoras, como el procesamiento de textos para un escritor, no son más que herramientas...

Sin embargo, permite a los estudiantes la adquisición y comprensión de conceptos nuevos con rapidez. [resaltado por nosotros]. (p. 6)

Podemos situar a las autoridades al mismo nivel que algunos profesores de matemáticas que consideran que todo es posible con la tecnología y que los conceptos se adquieren fácil y rápidamente...

Investigadores en didáctica de las matemáticas que consideran que la tecnología es importante en el desarrollo de la matemática, han realizado experimentaciones que nos ponen en guardia contra esa "ingenuidad de las autoridades" y de algunos profesores de matemáticas con respecto al uso directo sin consideraciones didácticas del uso de la tecnología. Por ejemplo, Guin et Trouche (1999, p. 195-196), señalan lo siguiente:

No más de 15% de los docentes incluyen calculadoras gráficas en su enseñanza, a pesar de que todos los estudiantes dirigidos a una formación científica tengan una calculadora gráfica [nivel preuniversitario]. "Los profesores tienen una tendencia a oponerse, incluso a la integración de nuevas tecnologías en el nivel primario.

Continúan con lo siguiente (Idem, p. 197). Dos grupos de 50 estudiantes (nivel preuniversitario) se les solicitó calcular el límite siguiente: $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x + 10 \sin x = \infty ?$

Uno de los grupos utilizaba calculadora con posibilidades gráficas y el otro no. Los resultados son: 75% de éxito con calculadora y 95% de éxito sin calculadora.

Veamos ahora los resultados de otro investigador, Tall (2000, p. 213), con dos grupos; uno utilizando DERIVE y el otro sin utilizar tecnología. A dos grupos de estudiantes (nivel preuniversitario) se les solicitó una explicación conceptual de:

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Los resultados muestran que el grupo DERIVE obtuvo 0% de éxito, y el grupo NO-DERIVE obtuvo 100% de éxito.

Estos autores, Guin, Trouche, Tall, entre otros, intentan mostrarnos que los procesos de instrumentación y de instrumentalización (Rabardel, 1995) no son considerados como procesos complejos que deben ser tratados cuidadosamente en el aula de matemáticas.

La discusión no debería dirigirse a si estamos o no de acuerdo en utilizar la tecnología. Más bien, si somos promotores sobre el uso de tecnología, debemos como Guin, Trouche & Tall (entre otros), realizar investigación que nos permita proporcionar de manera más clara las ventajas y desventajas del uso de tecnología en el aula de matemáticas para mejorar las estrategias de enseñanza.

Esta introducción sobre los problemas del uso de la tecnología en el aula de matemáticas nos proporciona una mejor idea de las reflexiones necesarias para avanzar sobre las estrategias de enseñanza para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en ambientes tecnológicos.

- 1) Sobre los procesos de instrumentación e instrumentalización que se deben promover en el aula de matemáticas de los artefactos tecnológicos que hasta el momento no se les ha otorgado la importancia que merecen, tanto por los investigadores, como los profesores y autoridades educativas.
- 2) Sobre la falta de estructuración de tareas y de análisis de acciones que se deberían promover en el aula de matemáticas bajo un contexto tecnológico. No todos los problemas que se utilizaban en el pasado sirven en un contexto tecnológico (al menos necesitan una adaptación al medio en el que van a ser trabajados).
- 3) La poca importancia que se le otorga al equilibrio que debería existir entre las acciones en ambientes de papel y lápiz y acciones desde un punto de vista tecnológico,

Si nos situamos, en lo particular, en una teoría sobre las representaciones, y en lo general, en una transición del constructivismo a una teoría social interaccionista del aprendizaje de las matemáticas, tendríamos que considerar diferentes aspectos como los siguientes.

Desde un punto de vista constructivista (construcción individual del conocimiento) tenemos que considerar las representaciones institucionales (aquellas que aparecen en los libros de texto, en pantallas de computadoras y calculadoras, etc.):

- A) Toda representación matemática es parcial con respecto a lo que representa (Duval, 1993, 1995).
- B) Un concepto matemático es construible a medida que se construye una articulación entre representaciones (Duval, 1993, 1995). Por lo tanto, en la construcción de un concepto, cada una de sus representaciones debe considerarse al mismo nivel de enseñanza sin darle en un principio prioridad a alguna de ellas. Bajo este marco teórico, los procesos de conversión entre representaciones juegan un papel esencial en la construcción de conceptos.

Desde un punto de vista socio-interaccionista, las representaciones funcionales inmersas en un acercamiento de diseño de tareas y de análisis de la acción para desarrollarlas en un ambiente social de construcción del conocimiento:

- C) Diseño de la tarea y un análisis de la acción (Leontiev, 1984; Hitt & Kieran, 2009) asociada a un ambiente social de construcción del conocimiento.
- D) Las representaciones no institucionales (diSessa, 1991; Hitt & Morasse, 2009) ligadas a la acción del individuo frente a una discusión con otro miembro de un equipo en el aula de matemáticas y análisis de su evolución hacia las representaciones institucionales dentro de un ambiente de construcción social del conocimiento.
- E) Procesos técnicos y de conceptualización de las matemáticas en ambientes tecnológicos y de interacción social.

Si bien aspectos teóricos sobre las representaciones tienen más de un siglo, una teoría de las representaciones desde un punto de vista constructivista y ligado a la educación matemática se desarrolló entre los años 1980 hacia 2000. Los aspectos tratados estaban fuertemente centrados en las representaciones institucionales y construcciones individuales del conocimiento. También las teorías sobre la construcción del conocimiento desde un punto de vista social emergieron desde principios del siglo pasado y poco a poco aspectos teóricos sobre las representaciones han sido considerados bajo estos enfoques sobre la construcción social del conocimiento. Por ejemplo el trabajo de Bordieu (1980) con su noción de *habitus* retoma los aspectos teóricos desarrollados por Vigotsky, Luria & Lontiev entre otros con un acercamiento que considera las representaciones internas y externas como importantes de construir en ambientes socio-interaccionistas.

En un contexto de construcción de conceptos matemáticos ligados a las representaciones en ambientes de interacción social, tenemos el trabajo de diDessa et al. (1991), de Gonzalez et al., (2008), Hitt & Morasse (2009) que analizan una construcción de conceptos matemáticos en ambientes socio-interaccionistas. Es en el acercamiento de estos autores, entre otros, donde podemos ver con mayor precisión la importancia del diseño de tareas matemáticas y un análisis de acciones desarrolladas tanto por alumnos de primaria, como por estudiantes de secundaria, frente a la resolución de situaciones problema. Hitt & Cortes (2009) y Hitt & Kieran (2009) enfatizan los

procesos de técnica y de conceptualización que se deben considerar en el diseño de actividades en ambientes de papel-lápiz y calculadora.

Preguntas de investigación en relación a la enseñanza de las matemáticas en un acercamiento social interaccionista del aprendizaje

En un primer acercamiento a la problemática, nos han interesado los siguientes aspectos (Hitt, 2007; Hitt & Cortes, 2009):

Qué metodología es apropiada en un ambiente de interacción social en el aprendizaje de las matemáticas?

Cómo integrar los aspectos de aprendizaje en colaboración, debate científico y auto aprendizaje (metodología ACODESA) en el aula de matemáticas?

Cuál es el rol de la calculadora en la resolución de situaciones problema en ambientes sociales de construcción del conocimiento?

Articulación entre representaciones

En lo que sigue, se considera un proyecto que dio origen a la metodología ACODESA en un entorno CAS (Hitt, 2007). En un enfoque sobre el uso de diferentes representaciones hemos propuesto, a una población de profesores de enseñanza secundaria en servicio que estaban estudiando una maestría en didáctica de las matemáticas (metodología utilizada durante dos cursos semestrales), una actividad que al principio pensábamos que era rutinaria y podría ser un ejercicio que permitiera la introducción de procesos de conversión de una representación a otra.

Los estudiantes en esta actividad ya estaban familiarizados con el trabajo en equipos y de discusión global, de acuerdo con la metodología ACODESA (ver Hitt 2007), que en resumen considera cinco etapas:

- Individual work: production of functional representations to understand the task;
- Teamwork on the same task. Process of discussion and validation. Refinement of functional representations;
- Discussion (could become a scientific debate). Process of discussion and validation (refinement of representations);
- Back on the task individually (individual work: reconstruction and self - reflection);
- Institutionalization. Process of institutionalization and use of institutional representations.

La actividad:

Calcular la derivada de la siguiente función : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
--

El trabajo individual y por equipos se desarrolló de manera usual; el profesor pudo identificar al mirar las producciones de los estudiantes que, o bien no sabían qué

hacer por estar frente a una función definida en partes; o bien, que una gran mayoría de estudiantes realizaba acciones ligadas a la concepción: “Dada una función definida en partes, la derivada de la función se calcula derivando directamente cada una de las expresiones que definen la función”. Es decir, que en nuestro caso, el cálculo de la derivada de la función los llevaba al resultado:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

El profesor pudo constatar que los estudiantes no realizaron conversión alguna entre representaciones.

Los estudiantes indican que no hubo discusión y que la actividad se trataba de un simple ejercicio de derivación. El profesor solicitó a uno de los equipos mostrar su resultado al resto de la clase.

Una estudiante (profesora en servicio, denominada Wendy), menciona simplemente que la derivada de la función proporciona el resultado antes mencionado y lo escribe en el pizarrón.

El profesor solicita más argumentos, y otra estudiante (profesora en servicio, denominada Lidia), que podemos catalogarla como formalista, menciona verbalmente que la derivada de la función consistía en derivar la 1a expresión algebraica y luego calcular los límites laterales cuando x tiende a 0 , para $x = 0$, obteniendo finalmente el resultado anunciado por Wendy.

El profesor al ver que Lidia proporcionaba el mismo resultado, pero que su justificación era diferente, le solicita que lo escribiera en el pizarrón lo que expresó en palabras.

Lidia se percató de que algo anda mal ya que no era tan inmediato que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$. De hecho, Lidia menciona que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$, pero que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \neq 0$ y que entonces no se puede pasar a la límite. Ella ahora duda sobre lo que puede ser la derivada en 0 .

Una vez que Lidia regresa a su lugar, otro estudiante (profesor en servicio, denominado Victor), sostiene que, dado el análisis de Lidia, la derivada NO EXISTE PARA $x = 0$.

Es así como emerge el debate científico en el aula de matemáticas

Wendy sostiene que la derivada en $x = 0$, es 0 . Esta vez, el argumento que proporciona es apoyándose con la representación gráfica de la calculadora de que la función “no oscila en $x = 0$ ”. El profesor le solicita que muestre a sus compañeros lo que obtuvo con la calculadora (ver Figura 1).

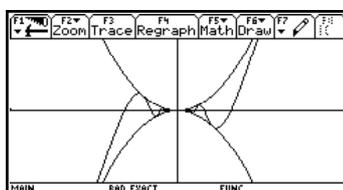


Figura 1. Pantalla de calculadora utilizada por Wendy

Alicia considera que la derivada no existe “No, la función *tiene* muchas oscilaciones”

Victor señala que, en general, no se le debe otorgar toda la confianza a la calculadora ya que ésta puede proporcionar una gráfica bonita, pero que no es realmente así. Añade que : “...realmente hay muchas oscilaciones y no se ve que [la gráfica] tenga un comportamiento bonito.”

La mayoría opina libremente que Lidia tiene razón (que la derivada en cero existe pero no es igual a cero) y que Victor y Wendy están equivocados. Wendy bajo este caudal de opiniones menciona entonces : “Me parece que soy la única a afirmar que la derivada en 0 es 0, puede que ellos tengan razón”. El curso se termina, y los estudiantes profesores continúan la discusión durante 20 minutos más, sin proporcionar verdaderamente otro argumento.

El profesor les menciona que dados los argumentos emitidos y la falta de consenso, de acuerdo a la metodología, sugiere la necesidad de una reflexión en casa y que en el siguiente curso se retomaría la actividad.

En el siguiente curso, Lidia toma la palabra diciendo que “La derivada de esta función $[f(x)]$ (ver Figure 2), es igual a 0 para $x = 0$; Sin embargo, no hay manera que esta función sea continua!”. Lidia utiliza la calculadora para mostrar que no es posible decidir sobre la derivada en $x = 0$: “La gráfica tiene muchas oscilaciones, allí, cerca del 0, por tanto, tengo la impresión de que no es posible pegarle el cero! la gráfica es una fuente de información, pero la gráfica no es confiable cuando se toma una escala más grande en x , la gráfica nos muestra oscilaciones y una línea vertical.»

Ello quiere decir que Lidia realizó acercamiento (zooms) alrededor del $(0, 0)$. Añadiendo enfáticamente que la función a fortiori es discontinua en cero.

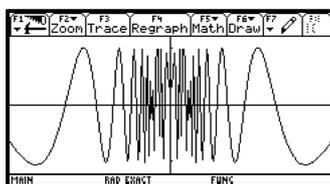


Figura 2. Representación gráfica mostrada por Lidia

Durante la discusión Wendy utiliza todo el tiempo su calculadora y entonces el profesor le pregunta sobre su opinión. Wendy declara que el resultado que ella había obtenido es verdadero y que la derivada en 0 es igual a 0. Ella solicita pasar al pizarrón,

para mostrar un argumento nuevo de corte algebraico:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

El argumento de Wendy es correcto pero todas las dudas vertidas antes afloran y la mayoría muestra su desacuerdo. Incluso, algunos intentan encontrar un error en su procedimiento. Por ejemplo, Irene dice: “No estoy Segura, pero para $h = 0$, nosotros tenemos algo como *seno* del infinito”.

Podemos ver que la concepción de Irene, es una concepción que la tienen una gran mayoría de estudiantes pre-universitarios y algunos estudiantes universitarios que cuando hablamos de que “ h tiende a cero”, lo consideran que “finalmente”, ello quiere decir que “ $h = 0$ ”. Esta concepción también puede ser detectada en algunos profesores de enseñanza secundaria como es el caso de Irene.

Victor interviene insistiendo que un probable error existe en el tratamiento algebraico, él dice: “Si aceptamos el resultado [de Wendy] como verdadero, entonces debemos aceptar que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$, lo que es imposible! Existe una contradicción evidente”.

Wendy, siempre utilizando su calculadora, responde con otro argumento, pero ahora visual, ella declara que “pero es cierto que la derivada de esta función *es 0, esss 0*, gráficamente es la recta horizontal”. Además añade que en todo caso, ella quisiera que le muestren el error en su tratamiento algebraico. No recibe respuesta a su solicitud...

Durante la discusión la mayoría de los estudiantes utilizaban la calculadora. Victor pasa al frente y conecta su calculadora al viewscreen mostrando las diferentes ventanas de la Figura 3.

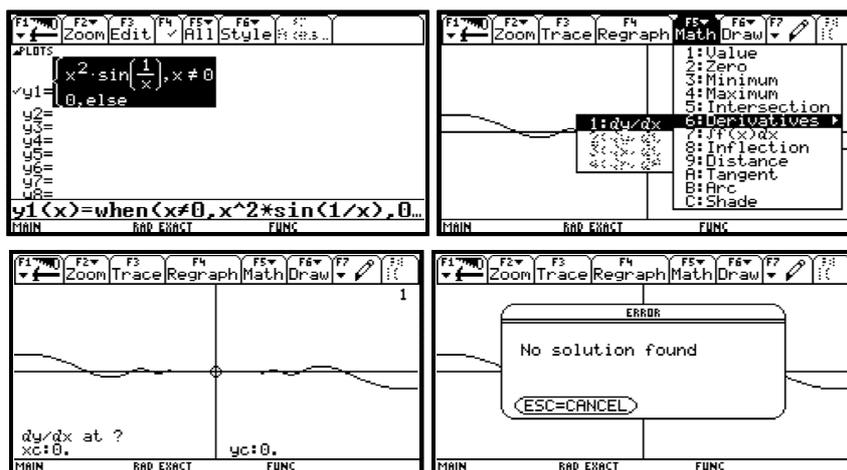


Figura 3. Producción de Victor con su calculadora

Ello provoca la desestabilización completa en los estudiantes...

Ahora es el turno de Wendy de defenderse... afirmando que no se debe otorgar toda la confianza a la calculadora... (ella utiliza exactamente los mismos argumentos que

Victor). Incluso, ella hace un resumen de varios casos durante el curso en donde la calculadora proporcionaba resultados imprecisos y/o falsos.

Hemos llegado a un punto muy importante en este debate científico. Victor menciona algo que es clave en la resolución de este problema, sobre la articulación entre representaciones, él menciona que seguramente debe haber un error en el tratamiento algebraico, pero al mismo tiempo, dice que en realidad no puede conciliar el tratamiento algebraico con el visual proporcionado por las gráficas de la calculadora.

Nuevamente el curso se termina, pero esta vez los estudiantes están desanimados, un sentimiento de impotencia reina en el aula, y solicitan la respuesta al profesor. El profesor les recuerda que el contrato era que en la metodología ACODESA son ellos quienes confirman o no los resultados. El les solicita reflexionar en casa nuevamente...

La discusión recomienza en el curso siguiente, la división entre los estudiantes es más notoria. Sin embargo, algunos minutos después de iniciada la discusión, Victor solicita la palabra y dice lo siguiente: "La derivada de una función derivable no es necesariamente continua", todos comprenden que el error estaba en esa creencia que al principio de la resolución de la actividad, fue sostenida implícitamente por Lidia. Victor menciona que todo el problema estaba en esa interpretación, y que lo realizado por Wendy era correcto!

En primer lugar, podemos ver que en un proceso de resolución de problemas, un marco teórico como el de Duval no permite un análisis de la situación. En este caso, no es sólo la conversión entre las representaciones, sino de ensamblar argumentos algebraicos con argumentos visuales, en relación a una resolución correcta libre de contradicciones. La situación requiere ser consciente de la contradicción y luego realizar un proceso matemático y la coordinación entre representaciones para resolver la contradicción. Esto podría ser posible porque el ambiente colaborativo de aprendizaje. Los estudiantes hicieron un esfuerzo considerable para descubrir el error (dos lecciones y media, y las reflexiones en casa). De hecho, los estudiantes se enfrentaban a un obstáculo cognitivo proporcionado por una concepción: "Si una función es diferenciable entonces su derivada es continua." La contradicción se resolvió encontrando un contraejemplo de esta proposición, superando así, el obstáculo cognitivo.

Preguntas de investigación en relación al diseño de actividades para estudiantes de secundaria

Nuevamente el proyecto inmerso en un ambiente CAS, nuestras preguntas de investigación en relación con el diseño de actividades para estudiantes de secundaria, han tenido que ver con (ver Hitt & Kieran, 2009):

¿Cuál es el papel de la técnica en la conceptualización de las matemáticas?

¿Existe una interacción entre la técnica y conceptualización?

¿Podemos hablar de una comprensión conceptual de una técnica?

Actividades para estudiantes de secundaria

En un nuevo proyecto dirigido por Kieran en la Université du Québec à Montreal (UQAM), el equipo realizó un diseño de actividades para estudiantes de secundaria del décimo grado, en ambientes CAS. Ocho actividades fueron diseñadas, y los investigadores preguntaron la opinión de varios profesores de secundaria sobre el uso de estas actividades. Algunas fueron modificadas de acuerdo a sus sugerencias

y finalmente se llegó a la versión definitiva (ver <http://www.math.uqam.ca/APTE/Taches.html>).

Metodología

En el primer proyecto se realizaron diferentes experimentaciones en diferentes grupos de matemáticas e incluso en diferentes países :

- 3 grupos (dos en una escuela de habla Inglesa, y otra de habla Francesa) en Montreal, Canadá, durante el período de Sept-Feb (2004-2005);
- 1 grupo en Portland, USA;
- 2 grupos en Toluca, México;
- Repetición de la experimentación en la escuela de habla Inglesa, con un grupo diferente (Sept.-Dcc. 2005).

Diseño de actividades

El diseño de actividades se desarrolló tomando en consideración el programa de estudios de Québec en 2004 para estudiantes de grado 10 de secundaria. Se diseñaron 8 actividades que se pusieron a prueba en las diferentes clases mencionadas en la metodología (ver <http://www.math.uqam.ca/APTE/Taches.html>).

Una de las actividades (actividad No. 6), se relacionaba con la factorización de $x^n - 1$. Esta tarea sobre la factorización en forma directa, es una actividad clásica que incluso ya ha sido experimentada en ambientes tecnológicos. Por ejemplo, Munier & Aldon (1996), realizaron no una sino tres experimentaciones alrededor de la misma actividad con estudiantes del décimo primer grado en Francia. Como lo señalamos antes, sue studio se desarrolló en tres fases (1990, 1991 & 1993):

- Utilizando papel y lápiz (trabajo en equipo, 2 horas),
- Utilizando DERIVE (ellos pensaron que la tecnología facilitaría la tarea...)
- Utilizando DERIVE inmerso en un proyecto largo (3 meses)

¿Qué es lo diferente con nuestro acercamiento?

La diferencia en el diseño de nuestra actividad en relación con la factorización de $x^n - 1$ (y en general con otras actividades diseñadas) **es el equilibrio que creemos que es importante proporcionar a las actividades de papel y lápiz y su relación con el uso de la calculadora.** En nuestro marco teórico, **distinguimos precisamente ya sea uno u otro enfoque y las acciones de los estudiantes que relacionan dichos enfoques.**

4.2 Notación utilizada en nuestro modelo de aprendizaje

La notación que utilizamos es la siguiente (ver Hitt & Kieran, 2009):

- Tarea con papel y lápiz **TASK_{p-p}**;

- Tarea CAS **TASK_{CAS}**;
- Técnica ligada a un proceso con papel y lápiz **TECH_{P-P}**;
- Técnica CAS **TECH_{CAS}**;
- Producción semiótica con con papel y lápiz **PROD_{P-P}**;
- Producción semiótica CAS **PROD_{CAS}**;
- Tarea P-P promoviendo una producción semiótica $TASK_{P-P} \xrightarrow{TECH_{P-P}} PROD_{P-P}$ que depende de una técnica **TECH_{P-P}**.
- Una tarea CAS promoviendo una producción semiótica $TASK_{CAS} \xrightarrow{TECH_{CAS}} PROD_{CAS}$ que depende de una técnica **TECH_{CAS}**.
- Construcción de una teoría relacionada a una técnica:
 - $\left(TASK_{P-P} \xrightarrow{TECH_{P-P}} PROD_{P-P} \right) \dashrightarrow THEO_{P-P}$ (la flecha punteada significa una construcción interna)
 - $\left(TASK_{CAS} \xrightarrow{TECH_{CAS}} PROD_{CAS} \right) \dashrightarrow THEO_{CAS}$ (la flecha punteada significa una construcción interna)
- Conversión entre producciones: **PROD_{P-P} → PROD_{CAS}** y viceversa **PROD_{CAS} → PROD_{P-P}**.
- Posible articulación entre técnicas y construcción de una teoría:
 - $(TASK_{P-P} \rightarrow PROD_{P-P}) \xleftrightarrow{THEO} (TASK_{CAS} \rightarrow PROD_{CAS})$ (la flecha punteada significa una construcción interna).

En la actividad 6, los constructos teóricos los hemos designado como **THEO_n**, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. La elaboración de la actividad 6, se desarrolló en diferentes etapas, en donde implícitamente estaba contemplado la formación de conjeturas, el uso de contra ejemplos para desechar algunas conjeturas, procesos de argumentación (en ese nivel los estudiantes no saben lo que es una prueba en matemáticas).

Fase 1. Recordando productos notables.

La intención de esta fase, fue la de promover el recuerdo de los productos notables y comparación con los resultados con la calculadora.

Fase 2. **THEO₁**: Dada la expresión $(x^n - 1)$ para un **n** específico, esto es equivalente a :

$(x - 1) (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ – este constructo basado en la técnica telescópica.

En esta fase se deseaba que los estudiantes construyeran un tipo especial de técnica (la técnica telescópica)

Fase 3. THEO₂: La equivalencia de “PROD_{P-P} y TECH_{P-P}” con “PROD_{CAS} y TECH_{CAS}”

Considerando el trabajo de Guin & Trouche y Tall, mencionados en la introducción, en esta fase se tuvo la precaución de confrontar a los estudiantes a sus producciones en papel y lápiz utilizando la técnica adquirida en la Fase 2, con los resultados que proporciona la calculadora. Este punto es muy importante. Los matemáticos y profesores han desarrollado intuiciones y conocimientos que les permiten predecir sobre los resultados que van a obtener utilizando tecnología. Sin embargo, los estudiantes que no cuentan con estas habilidades, tienen la tendencia en creer ciegamente en los resultados de la computadora o calculadora sin contar con predicciones para poder asimilar adecuadamente estos resultados. Un cálculo del límites como el solicitado por Guin & Trouche, a un matemático o profesor no le cuesta trabajo alguno, ya sea un cálculo directo o a través de una interpretación adecuada de las unidades significativas necesarias para un cambio de registro (en el ejemplo de Guin & Trouche del registro gráfico al algebraico) ; Sin embargo, a los estudiantes les cuesta mucho trabajo ya que en el aula no les permitieron desarrollar las habilidades necesarias para la identificación de unidades significativas en los cambios de registro.

La intención de esta fase fue la de promover los procesos de conciliación entre la producción en lápiz y papel de los estudiantes con los resultados que proporciona la calculadora en el mismo registro algebraico.

Fase 4. THEO₃: La conjetura que $(x^n - 1)$ tiene exactamente dos factores, $(x - 1)$ y $(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$, cuando n es impar (proposición falsa).

Al solicitarles a los estudiantes la factorización de $(x^n - 1)$, $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Se intentó promover la falsa proposición de que se tendrían exactamente dos factores $(x - 1)$ y $(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$, cuando n es impar.

Fase 5. Cambio conceptual – rechazando la conjetura y generando una nueva.

THEO₄: Rechazo de la conjeturas precedents para producir una nueva: $(x^n - 1)$ tiene exactamente dos factores, $(x - 1)$ and $(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$, cuando n es un número primo.

En esta fase se les solicitó a los estudiantes la factorización de $(x^n - 1)$, $n \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. Se intentó que los estudiantes se dieran cuenta que su conjetura inicial era falsa utilizando el contra ejemplo $x^9 - 1 = (x - 1)(x^2 - x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$. Ello les permitiría la producción de una nueva conjetura que pudiera ser verificada y validada parcial y empíricamente utilizando la calculadora, de que $(x^n - 1)$ tiene exactamente dos factores, $(x - 1)$ y $(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$, cuando n es un número primo.

Fase 6. Coordinando teorías o distinguiendo teorías

En esta fase se le solicitaba a los estudiantes el cálculo de factorizaciones con n muy grande para verificar si aplicaban con acierto sus resultados obtenidos en las otras fases : Factorizar $(x^n - 1)$, $n \in \{2004, 3003, 853\}$.

Fase 7. Justificación de la conjetura – o profundizando en la teoría – hacia la demostración

En esta fase, se les solicitó a los estudiantes de proporcionar explicaciones de porqué $(x+1)$ es siempre un factor de x^n-1 para valores pares de n , $n \geq 2$. Como los estudiantes, en ese nivel, no saben lo que es una prueba en matemáticas, se esperaba que proporcionaran argumentos lo mejor fundados posible para convencer a sus compañeros de la generalidad del resultado.

Los estudiantes entrevistados (Hitt & Kieran, 2009), en una duración de una hora con 10 minutos llegaron a descubrir el punto principal de la conjetura. En esta entrevista ya no hubo posibilidad de continuar con la última fase sobre la argumentación y validación de la conjetura ya que ella iba a ser desarrollada en clase con todo el grupo en el curso siguiente.

A todo lo largo de la entrevista semi-estructurada, tanto uno de los estudiantes como el otro utilizaba la calculadora para comprobar las conjeturas de su compañero. Podemos decir que hubo una coordinación entre uso de tecnología, intervención de uno u otro de los estudiantes, verificación de conjeturas en forma parcial-empírica, uso de contra ejemplos y generalizaciones. El momento del Eureka llegó en el minuto 58. Los estudiantes al haber conjeturado y haber encontrado varios contra ejemplos a su primera conjetura, finalmente pudieron conjeturar lo esperado por los investigadores, utilizando la calculadora con grandes números (ver Hitt & Kieran, 2009). La verificación con números muy grandes es prácticamente imposible de realizarse en el tiempo que utilizaron los estudiantes en un ambiente estricto de papel y lápiz.

Discusión

Nuestro diseño de la metodología ACODESA (ver Hitt, 2007; Hitt & Morasse, 2009; Hitt & Cortes, 2009) para promover un aprendizaje en ambientes de interacción social y uso de tecnología, así como las tareas diseñadas en el proyecto de Kieran et al., (ver <http://www.math.uqam.ca/APTE/Taches.html>) han proporcionado frutos desde un punto de vista de la enseñanza. Consideramos que las producciones en esos proyectos apoyan al profesor de matemáticas en su tarea cotidiana.

Nuestro diseño de tareas y análisis de las acciones se muestra interesante para futuros diseños e investigaciones, el hecho de proponer un equilibrio en las actividades de papel y lápiz, la de distinguir los procesos técnicos y ligarlos a procesos conceptuales es muy importante.

Con nuestros diseños de actividades y procesos de aprendizaje en colaboración en contextos de interacción social, hemos conseguido que en el aula se generen procesos de conjetura, argumentación y procesos de validación parcial-empírica. Tales aspectos los consideramos necesarios de desarrollar en el aula de matemáticas antes de los procesos formales de demostración matemática.

Consideramos que una metodología de aprendizaje en colaboración como la metodología ACODESA y un diseño de actividades que equilibren las producciones en papel y lápiz y uso de tecnología, tendría un mayor impacto en el aula de matemáticas. Impacto necesario si se quiere verdaderamente tener una influencia sobre el uso de la tecnología en el aula de matemáticas.

Agradecimientos

Por la presente agradecemos al Consejo de Recherche en Sciences Humaines du Canada (No. 410-2008-1836, CID 130252). Expresamos también nuestra agradecimiento a los estudiantes profesores y alumnos que participaron en los estudios mencionados.

Referencias

- Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris, Éditions de Minuit.
- diSessa A., Hammer D., Sherin B. & Kolpakowski, T. (1991). Inventing Graphing : Meta-Representational Expertise in Children. *Journal of Mathematical Behavior*, 10, 117-160.
- Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 37-65.
- Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5, 37-65. In F.Hitt (Ed., 1998), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201), México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval Raymund (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Peter Lang, Suisse.
- Gonzalez A., Hitt F. & Morasse C. (2008). The introduction of the graphic representation of functions through the concepto co-variation and spontaneous representations. A case study. In Figueras, O. & Sepúlveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XX North American Chapter Vol. 3*, pp. 89-97. Morelia, Michoacán, México: PME.
- Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.
- Hitt F. (2004). Réflexions sur les potentialités des logiciels et des calculatrices symboliques pour l'enseignement des mathématiques. Une approche didactique. *Proceedings/Tagungsband TIME-2004 : International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education*. Montréal, Canada, pp. 1-10.
- Hitt F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Hermes.
- Hitt F. & Cortés C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. Artículo por invitación, *Revista Digital Matemática, Educación et Internet*. www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/. Vol. 10u, No 1, pp. 1-30.
- Hitt F. & Kieran C. 2009. Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a Task-Technique-Theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, DOI number: 10.1007/s10758-009-9151-0. <http://www.springerlink.com/content/657wt76n04x43rk8/>.
- Hitt F. & Morasse C. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes. *Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009. "Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009*. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy). http://math.unipa.it/~grim/cieaem/quaderno19_suppl_2.htm
- Leontiev A. 1984. *Activité Conscience Personnalité*. Moscou, Editions du Progrès.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. Programme de Formation, Deuxième Cycle du Secondaire. (Novembre-2007). <http://www.mels.gouv.qc.ca/DGFJ/dp/menusec.htm>.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin.

Tall, D. (2000). Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal*, 12, 210-230.